割圜密率捷法

割圜密率捷法卷三

圖解上

弧矢弦相求圖解

凡解有因法而得者有不因法而得者因法而得者法如是解如是止也不因法而得者法如是解不止于如是也不因法而得何以有是解乎葢其初非爲法解也亦欲自立一法與前法並行及深思而得之乃與作者脗合遂以爲是法之解故法如是而解之曲暢旁通不止于如是也　先生初閲杜泰西圜徑

求周弧背求弦求矢之法知其義深藏而不可不求甚解欲自立一法以觀其同異因思古法有二分弧法西法又有三分弧法則遞分之亦必有法也由是思之遂得五分弧及七分弧次列三分弧五分弧七分弧三數觀之見其數可依次加減而得遂加減至九十九分弧然其分數皆奇數也又思之遂得二分弧依前法遞推至四分弧六分弧加減至百分弧則偶數亦備矣然猶分而不能合也又思之奇偶可合矣然逐層求之數多則繁若累至千萬分猶未易也又思之其數可超位而得則以

二分弧五分弧求得十分弧以十分弧求得百分弧以十分弧百分弧求得千分弧以十分弧千分弧求得萬分弧既得百分弧千分弧萬分弧三數然後比例相較而弧矢弦相求之密率捷法于是乎成及其成也與杜泰西之法無異遂以是爲解焉豈非不因法而得者乎計其次第相求以至成書約三十餘年今觀其解初若與本法絕不相侔及循序而進而其法之必由乎此又有確然無可疑者至于設一術取一數反覆求之諸法皆立而其用未盡誠所謂法如是解不止于如是也際新親承

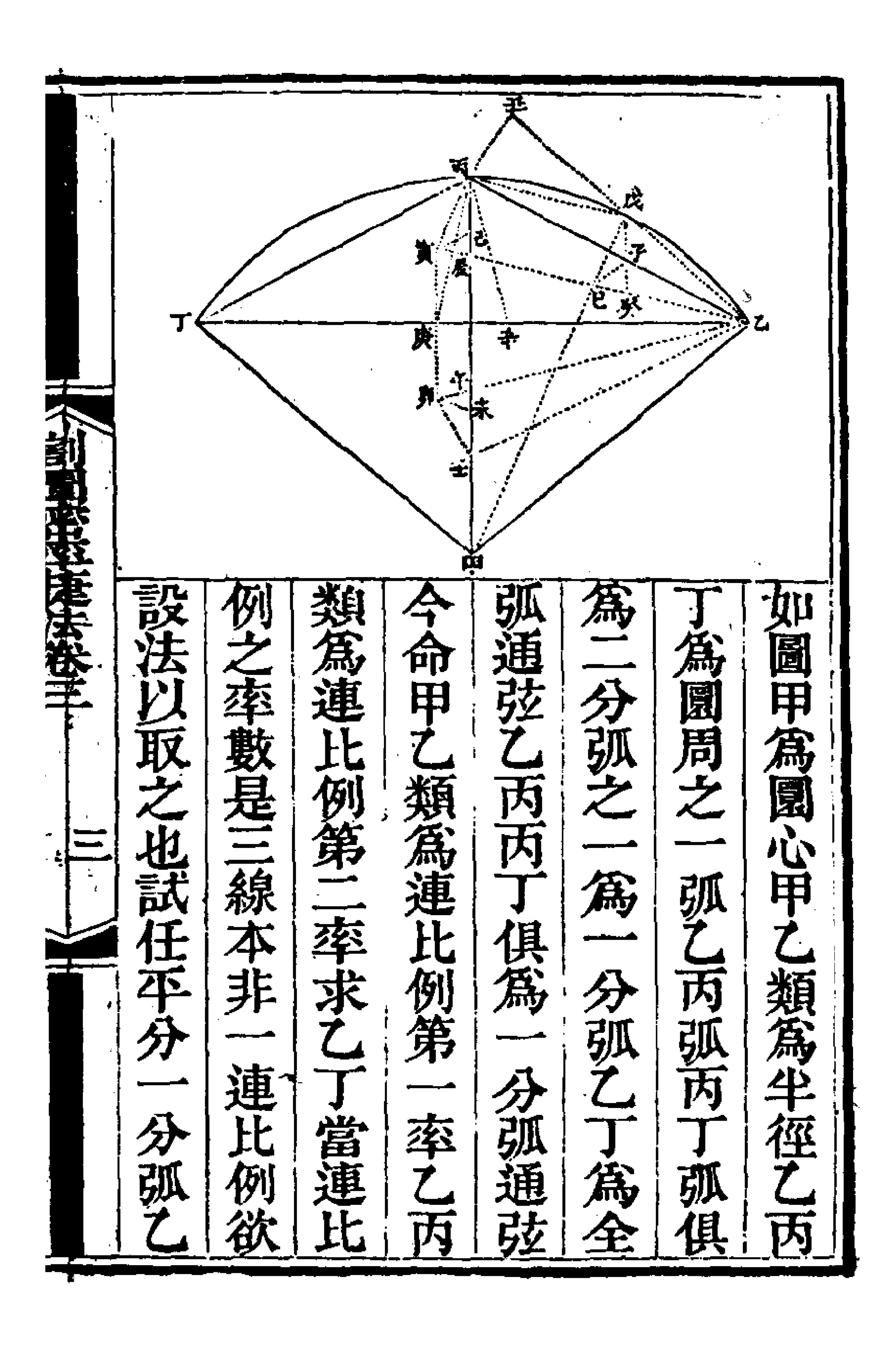
指授且不敢違遺命今輯其解並述其意云

分弧通弦率數求全弧通弦率數

按分弧通弦求全弧通弦即弧背求通弦所由起也若以數求之不勝其繁今用借根方法專取其率數率數定則數可得而求矣

設有圜周一弧二分之命圜半徑爲連比例第一率一分弧通弦爲連比例第二率求全弧通弦率數幾何

此題用勾股法求之甚易然不能與諸法相通故設此問觀者依次求之則知其不可易矣



如圖甲爲圜心甲乙類爲半徑乙丙丁爲圜周之一弧乙丙弧丙丁弧俱爲二分弧之一爲一分弧乙丁爲全弧通弦乙丙丙丁俱爲一分弧通弦今命甲乙類爲連比例第一率乙丙類爲連比例第二率求乙丁當連比例之率數是三線本非一連比例欲設法以取之也試任平分一分弧乙

丙于戊作甲戊半徑乙戊丙戊半分弧通弦又與乙戊相等作乙己線成甲乙戊乙戊己連比例三角形見數理精蘊次自乙丁二點取乙丙丙丁之分截乙丁線于庚于辛作丙庚丙辛二線成乙丙庚丙庚辛丁丙辛丙辛庚亦同連比例三角形與甲乙戊乙戊己連比例三角形為同式形凡心角邊角對弧等則心角比邊角大一倍對乙丙丙丁一分弧之甲心角倍大于乙丁二邊角則對乙戊半分弧之甲心角必與對乙丙丙丁一分弧之乙丁二邊角等兩等邊三角形一角等餘二角必等故為同式形如以甲乙與乙戊之比同于乙戊與戊己之比又以甲乙與戊己之比同于乙丙或丙丁與庚辛之比兩邊比例同式則此形一三率

相比必同于彼形一三率相比既得庚辛則以乙丙或丙丁一分弧通弦倍之得乙丁多一庚辛減去庚辛卽得乙丁爲全弧通弦若依此求之固易易也然題無乙戊半分弧通弦又甲乙戊形與乙丙庚形非一連比例今又設法先以乙戊半分弧通弦爲二率求得乙丙所生三率之數然後以乙丙所生三率之數轉求得戊己之數爲三率則二形可合爲一連比例矣試自乙點取乙丙之分作乙壬線成甲乙丙乙丙壬連比例三角形乙丙爲二率丙壬爲三率又自戊點取戊己之分作戊癸線自己點取己癸之

分作己子線成乙戊己戊己癸己癸子連比例三角形乙戊為二率戊己為三率己癸為四率癸子為五率次將乙戊乙己引而倍之成乙丑寅同式形又將乙丑寅形以乙寅為軸展為乙寅卯形則乙丙與乙庚合丙乙寅角庚乙寅角為平分角又將乙卯庚形以乙卯為軸展為乙壬卯形則乙庚與乙壬合庚乙卯角壬乙卯角亦為平分角又自寅點取寅辰之分作寅己線則丙寅辰寅辰己連比例形與戊己癸己癸子連比例形相等二形為戊丙乙寅二平行線內兩三角形其角必等各邊又相平行故為相等如以甲乙為連比例第一率倍乙戊得乙丑與乙戊戊

丙併等爲又二率求得又三率爲丑寅寅卯併甲乙戊丙四邊形與乙丑寅卯四邊形爲同式形與丙寅寅卯卯壬併等乙丑丙寅庚卯壬五句股形之乙角俱等又兩兩同用一邊故五形俱相等爲戊己之四倍比丙壬三率多一辰巳十六分又五率之一丙寅或壬卯與丙辰或壬午等寅卯與辰未或巳午等是丙寅寅卯卯壬併之三率比丙壬三率多一辰巳或午未丙寅與戊己等辰巳與癸子等丙寅寅卯卯壬併之三率爲戊己之四倍求得五率必爲癸子之十六倍故與癸子等之辰巳爲十六分五率之一也乃以一又三率少十六分又五率之一爲丙壬三率之數轉求得丙寅寅卯卯壬併之數四歸之得丙寅與戊己等是戊己之數不生于乙戊而生于乙丙丙壬原生于乙丙甲乙戊

乙丙庚二形雖非一連比例而其數已合為一連比例矣然後以甲乙與戊己之比同于乙丙與庚辛之比而得庚辛為二倍一分弧通弦與全弧通弦之較也法借一根為半徑甲乙為連比例第一率又借一根借根方法任借數根俱可故古法有立天元一地元一人元一者四元玉鑑又有所謂四元者皆此類也為一分弧通弦乙丙為連比例第二率二率自乘一率除之得一根為連比例第三率丙壬其式先列率數于上隨所

第一率 一 甲乙

第二率 一 乙丙

第一率 ○○○

第二率 二○

第三率 一 丙壬

又二率一　乙丑

第一率〇〇　丙寅
又二率二〇
四又三率一

第一率〇〇　辰巳
四又三率二〇
六又五率一

又三率一乘一
六又五率〇少
第三率一

用列之次如乘法列之以下條乘上條一率無數下書〇二率一乘一率〇下書〇乘二率一得一書三率下降位代一率除建功案一率〇二率一左右平列副置上下二位以下位由右而左偏乘上位故二率之下位一乘二率之上位一仍得一卽爲三率也下凡乘法悉仿此又另借一根爲倍半分弧通弦乙丑爲連比例又二率又二率自乘一率除之式同上得一根爲

第一率〇〇〇 〇一〇
又三率二一〇 〇一〇
一六又五率二少一六 〇一六
一六又七率 二少一少 二少
二六又九率 二多 一多

第一率〇〇 〇
第三率二 〇
第五率 一

一六又五率一
二六又七率二少
二六又九率一多

一六第五率一

又三率（丑寅寅卯併亦即丙寅寅卯卯壬併）四歸之（書分母四于三率上以代四歸）得四分又三率之一（丙寅）

又以四分又三率之一（丙寅與戊己等）自乘

一率除之（降位代一率除後倣此）得十六分（分母）

（四自乘得十六分母書于率上代除後倣此）又五率之一

（辰巳與癸子等）置又三率減去十六分又五

率之一得一又三率少十六分又五

率之一與一第三率（丙壬）之數等（其式爲二）

○建功案又三率一又五率十六分之一左右平列相減得又三率一少十六分又五率之一各書于各率之下層列于右與左第三率一爲相等凡相等之數借根方例悉于兩式之中以雙線別之次求連比例各率相等數橫列又一率又三率又五率等各率數于右第二率第三率第五率等各率數于左以後隨所用續書之至十五率止右書一三率少十六分五率之一自乘一率無數書○于下以下三率一乘上一率○仍書○于三率下下仿此乘上三率一得一爲五率全數全數乘全數仍得全數五率分母爲十六卽書十六于五率下分母卽全數乘上少十六分五率之一得少十六分七率之一書分母十六于七率上書一于七率下旁記少

號下仿此次以下少十六分五率之一乘上一三率得少十六分七率之一又乘上少十六分五率之一得多二次十六分九率之一五率分母十六分自乘故爲二次十六分即書兩十六分于九率上三四五次者並仿此乘訖併之得十六分五率之十六少十六分七率之二多二次十六分九率之一左書一三率自乘得一五率二得數爲相等以右五率分子十六爲法除右得數取十六分之一之數後同五率十六得一七率二不足法于七率上加一分母十六書原數二于下九率亦如之得十六分五率之一少二次十六分七率之二多三次十六分九率

之一除左得數得十六分五率之一二得數爲同母相等次另書五率同母相等數于上三率相等數于下各相乘以右下三率一徧乘上數得二次十六分七率之十六即十六分七率之一故下以十六除之爲二次十六分七率之一餘仿此少三次十六分九率之三十二多三次十六分十一率之一以下少十六分五率之一徧乘上數得少三次十六分九率之十六多三次十六分十一率之二少四次十六[illegible]率之一併之得二次十六分七率之十六少三次十六分九率之四十八多三次十六分十一率之三少四次十六分

一

第一率〇〇　〇　〇
又三率〇二　〇　〇
一六又五率一二少　〇　〇　〇
一六一六又七率二少　一六　〇　一六
一六一六一六又九率一多　三二少　一六少　四八少
一六一六一六又十一率　一多　二多　三多
一六一六一六一六又十三率　二少　一少

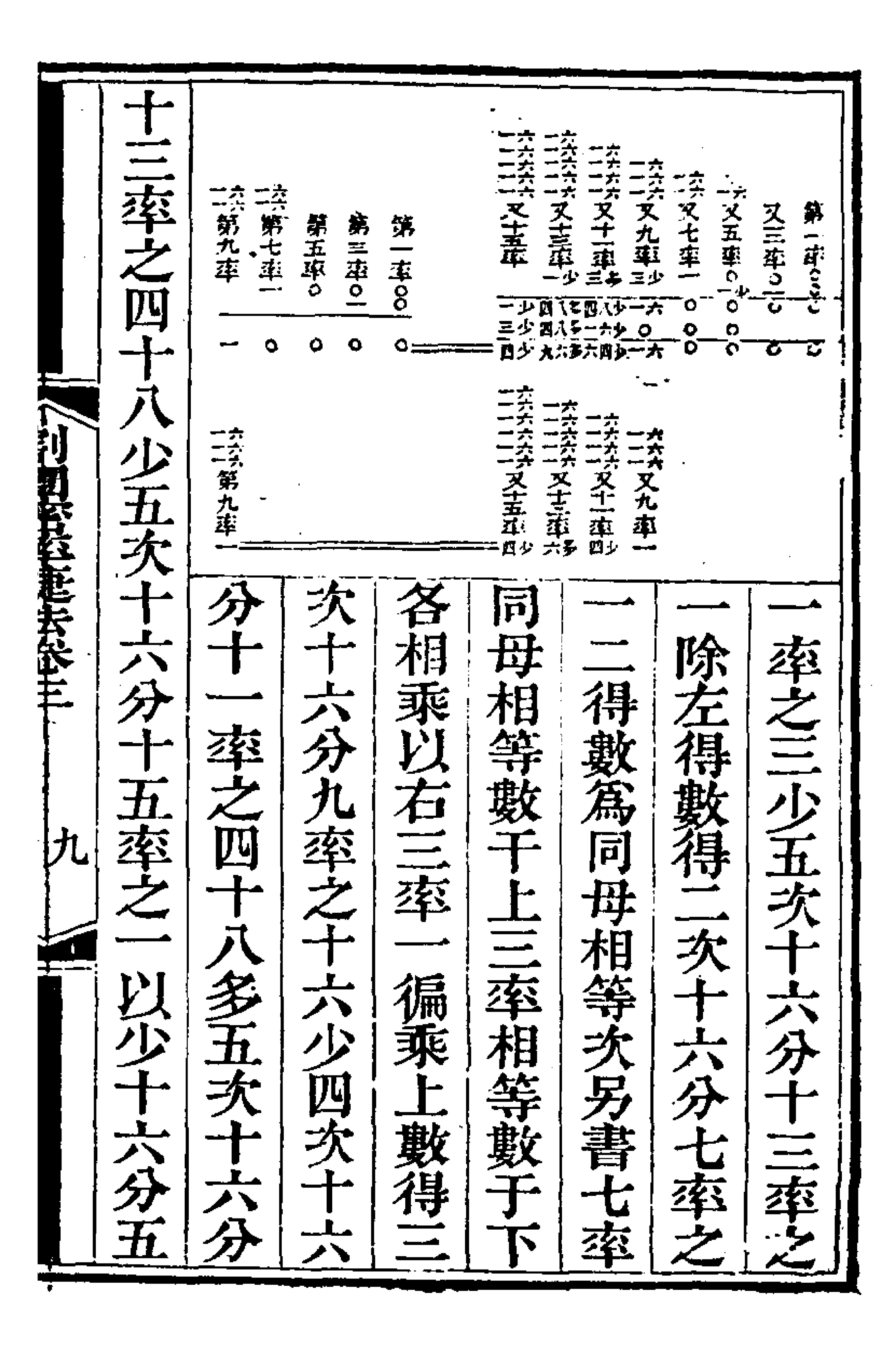
第一率〇〇　〇
第三率〇二　〇
一六第五率一　〇
一六一六第七率　一

二

一六一六又七率一
一六一六一六又九率三少
一六一六一六一六又十一率三多
一六一六一六一六一六又十三率一少

一六一六第七率一

十三率之一以左下三率一乘上十六分五率之一得十六分七率之一二得數相等以右七率分子十六爲法除右得數七率十六得一九率四十八得三十一率十三率皆不足法于各率上加一分母十六書原數于下得二次十六分七率之一少三次十六分九率之三多四次十六分十



一率之三少五次十六分十三率之
一除左得數得二次十六分七率之
二二得數為同母相等次另書七率
同母相等數于上三率相等數于下
各相乘以右三率一徧乘上數得三
次十六分九率之十六少四次十六
分十一率之四十八多五次十六分
十三率之四十八少五次十六分十五率之一 以少十六分五

率之一偏乘上數得少四次十六分十一率之十六多五次十六分十三率之四十八少五次十六分十五率之三十五率後截去不用故求至十五率止蓋連比例至十五率爲數已密至弧背弦矢相求法則又可依次而定不待盡求也併之得三次十六分九率之十六少四次十六分十一率之六十四多五次十六分十三率之九十六少五次十六分十五率之四以左三率一乘上二次十六分七率之一得二次十六分九率之一二得數相等以右九率分子十六爲法除右得數九率十六得一十一率六十四得四十三率九十六得六十五率四不足法

第一率 又三率 又五率 又七率 又九率 又十一率 又十三率 又十五率

第一率 第三率 第五率 第七率 第九率 第十一率 第十三率 第十五率

于上加一分母十六書原數于下得三次十六分九率之一少四次十六分十一率之四多五次十六分十三率之六少六次十六分十五率之四除左得數得三次十六分九率之一二得數爲同母相等（下俱仿此）次另書九率同母相等數于上三率相等數于下依前法乘除得四次十六分十一

又三率一　又五率　又七率　又九率　又十一率　又十三率　又十五率

第三率一　第五率　第七率　第九率　第十一率　第十三率　第十五率

率之一　少五次十六分十三率之五
多六次十六分十五率之十與四次
十六分十一率之一二得數爲同母
相等次另書十一率同母相等數于
上三率相等數于下乘除得五次十
六分十三率之一　少六次十六分十
五率之六與五次十六分十三率之
一二得數爲同母相等次另書十三

率同母相等數于上三率相等數于下乘除得六次十六分十五率之一同數（右不用後率數故同）相等既得各率相等數乃置三率相等數于上依右所少數取左右相等數累加之多少異號者以減爲加多數大從多號少數大從少號加五率一分相等數得右一三率少七率二分（分母俱如前）多九率一分與左一三率多五率一分等次加七率二分相等數得右一三率少九率五分多十一率六分少十三率二分與左一三率多五率一分七率二分等次加九率五分相等數得右一三率少十一率十四分多

十三率二十八分少十五率二十分與左一三率多五率一分七率二分九率五分等次加十一率十四分相等數得右一三率少十三率四十二分多十五率一百二十分與左一三率多五率一分七率二分九率五分十一率十四分等次加十三率四十二分相等數得右一三率少十五率一百三十二分與左一三率多五率一分七率二分九率五分十一率十四分十三率四十二分等次加十五率一百三十二分相等數得右一三率與左一三率多五率一分七率二分九率五分十一率十四

率	分母	數	下
第一率		〇〇	〇
第二率		〇二	〇
第三率	四	一	〇
第四率	四	〇	一
第五率	四一六	一多	〇
第六率	四一六	〇	一多
第七率	四一六一六	二多	〇
第八率	四一六一六	〇	二多
第九率	四一六一六一六	五多	〇
第十率	四一六一六一六	〇	五多
第十一率	四一六一六一六一六	一四多	〇
第十二率	四一六一六一六一六	〇	一四多
第十三率	四一六一六一六一六一六	四二多	〇
第十四率	四一六一六一六一六一六	〇	四二多
第十五率	四一六一六一六一六一六一六	一三二多	〇
第十六率	四一六一六一六一六一六一六	〇	一三二多

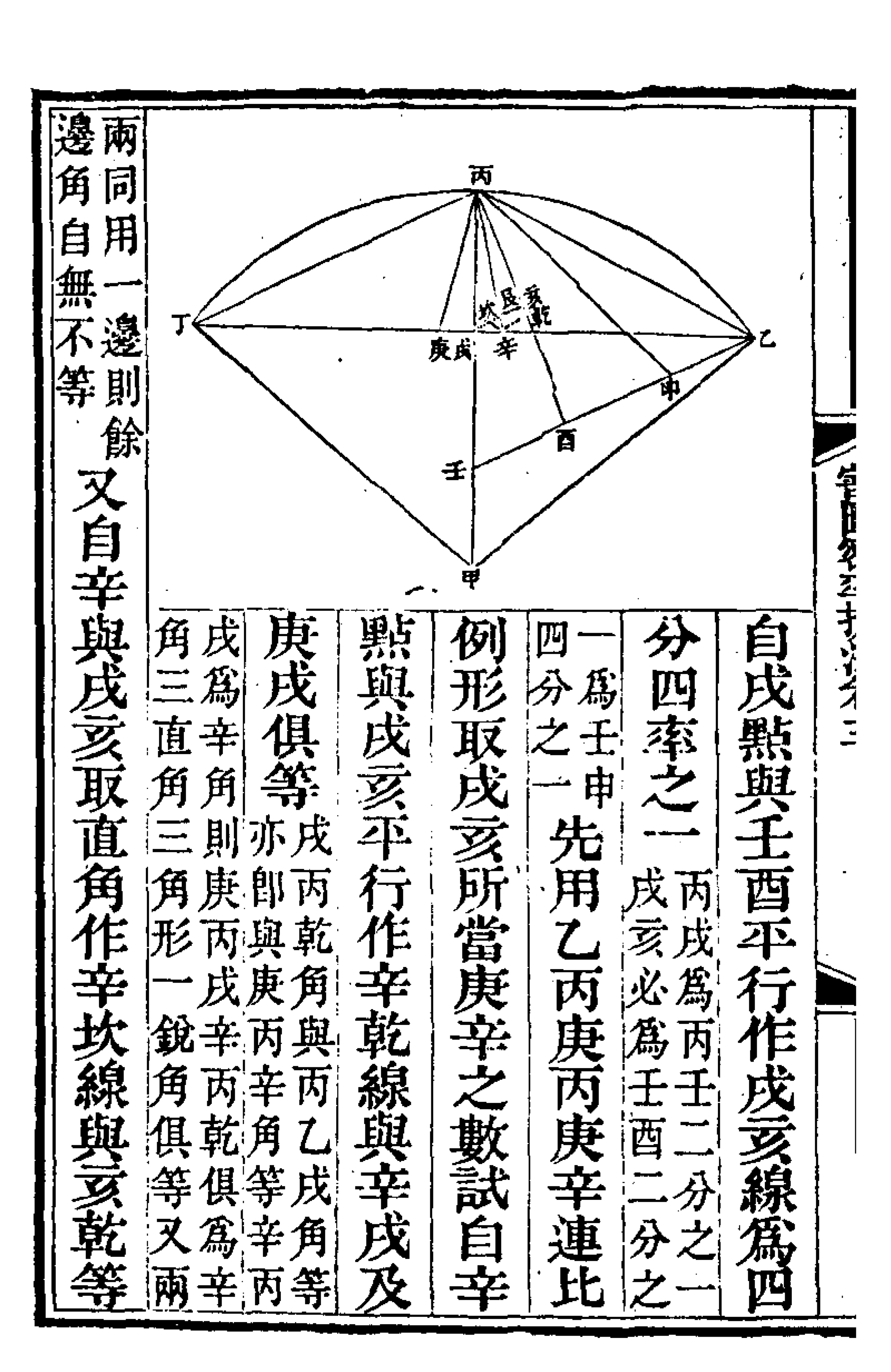
分十三率四十二分十五率一百三十二分等左得數即第三率丙壬求又三率丙寅寅卯卯壬併之共率數也四歸之於各率上加一分母四代之得四分三率及各率分數之一丙寅又爲三率戊己以二率乙丙乘之一率甲乙除之降一位代除得四分四率之一及六八等各率分數分母分子皆同惟各降率數一位爲倍一分弧通弦乙丙丁丙併

第二率	第四率	第六率	第八率	第十率	第十二率	第十四率	第十六率
	四	四 一六	四 一六 一六	四 一六 一六 一六	四 一六 一六 一六 一六	四 一六 一六 一六 一六 一六	四 一六 一六 一六 一六 一六 一六
二減	〇三	〇一多	〇二多	〇五多	〇一四多	〇四二多	〇一三二多
二	一少	一少	二少	五少	一四少	四二少	一三二少

與全弧通弦乙丁之較庚辛乃置一分弧通弦一二率二因之得二二率乙丁庚辛併減去四分四率之一及各率分數庚辛本位無數遇下數則以加爲減多變爲少得二二率少四分四率之一四分又十六分六率之一四分又二次十六分八率之二四分又三次十六分十率之五四分又四次十六分十二率之十四四分又五次十六分十四率之四十二四分又六次十六分十六率之一百三十

二卽一分弧通弦求二分全弧通弦之率數也如有圜半徑及一分弧通弦之數求二分全弧通弦之數以圜半徑爲連比例第一率一分弧通弦爲連比例第二率求得連比例第四率及第六第八等各率數次按分數取而倂之與倍一分弧通弦相減卽二分全弧通弦之數也

又法按前圖于乙丙壬形內自丙點至乙壬線與丙壬相等作丙申線其所截壬申爲連比例第四率又自丙點與乙壬線取直角作丙酉線壬酉與申酉等兩腰等兩分底必等爲二分四率之一又



自戊點與壬酉平行作戊亥線爲四分四率之一丙戊爲丙壬二分之一戊亥必爲壬酉二分之一爲壬申四分之一先用乙丙庚丙庚辛連比例形取戊亥所當庚辛之數試自辛點與戊亥平行作辛乾線與辛戊及庚戊俱等戊丙乾角與丙乙戊角等亦卽與庚丙辛角等辛丙戊爲辛角則庚丙戊辛丙乾俱爲辛角三直角三角形一銳角俱等又兩兩同用一邊則餘邊角自無不等又自辛與戊亥取直角作辛坎線與亥乾等

則坎亥與辛乾等又戊艮與戊辛等壬乙戊角與丙丁戊角等丙丁與乙壬必平行戊艮與乙壬平行卽與丙丁平行戊辛艮形爲丁丙辛形內所截之同式兩等邊三角形故戊艮與戊辛等戊辛艮與丙庚辛乙丙庚爲連比例三角形乃命丙庚爲連比例又三率二分之一與乙丙二率求得庚辛乙丙比丙庚同于丙庚比庚辛與戊辛辛乾併等爲四分又四率之一折半得戊辛二分又四分又四率之一卽八分之一與乙丙二率求得坎艮丁丙比戊辛同于戊辛比坎艮爲四分又十六分又六率之一于戊辛辛乾併四分又四率之一內減去坎艮又四分又十六分又六率之一得四分又四率之一少四分

又十六分又六率之一為戊亥所當庚辛之數然後以此數轉求得庚辛之數為庚辛所當戊亥之數即所用之四率數也法借一根為半徑甲乙為連比例第一率又借一根為一分弧通弦乙丙為第二率二率自乘一率除之得一根丙壬為第三率二歸之得二分三率之一丙戊二分三率之一自乘二率除之得四分四率之一戊亥又另借二分根之一為二分又三率之一丙庚自乘以二率除之得四分

甲乙
第一率一
第一率〇〇〇
第二率二二〇
第三率一

乙丙
第一率一
第二率〇〇〇
二第三率二二〇
四第四率一

第二率〇〇〇
二又三率一一〇
四又四率 一

二四又四率 一

第二率〇〇〇
二四又四率一一〇
四六一又六率 一
四又四率一〇一
四六一又六率〇二 少
四第四率 一

又四率之一庚辛二歸之得二分又四分卽八分又四率之一戊辛二分又四分又四率之一自乘二率除之得四分又十六分又六率之一坎艮置四分又四率之一庚辛與戊辛辛乾併等減亦卽與戊艮亥坎併等去四分又十六分又六率之一坎艮得四分又四率之一少四分又十六分又六率之一戊辛與四分第四率之一

第二率○○○
四分又四率二○○
四六一又六率二少四四
二六又八率二少二少
二六六又十率二多

四六一又六率一
四六六二又八率二少
四六六六二又十率一多

第二率○○
三六第四率二○
一六第六率一一

四六一第四率一

戊辛為四率相等數次求各率相等數
右書四分又四率之一少四分又十
六分又六率之一自乘二率除之一降位代之
得四分又十六分六率之一少
二次十六分八率之二多三次十六
分十率之一左書四分四率之一自
乘二率除之得十六分六率之一二
得數相等以右六率分子四為法除

第二率○○○
又四率○一○
又六率一一少○○
又八率二少四四
又十率一多一二少
又十二率一多二多三多
又十四率一少三少

第二率○○○
第四率○一○
第六率一○
第八率一

又八率一
又十率三少
又十二率三多
又十四率一少

第八率一

右得數得四分又十六分六率之一少四分又二次十六分八率之二多四分又三次十六分十率之一　除左得數得四分又十六分六率之二二得數爲同母相等　右乘除俱與前同惟先加分母四故數少異耳下不復詳　次另書六率相等數于上四率相等數于下乘除得四分又二次十六分八率之一　少四分又三次

第二率〇〇 〇 〇
四 又四率〇一 〇 〇
四六 一 又六率〇一少 〇〇 〇
四六六 二一 又八率一 〇〇 〇
四六六六 二一一 又十率三少 四〇 四
四六六六六 一二一一 又十二率三多 一二少 四少 一六少
四六六六六六 一二一一一 又十四率一少 一二多 一二多 二四多
六六六六六六 一二一一一一 又十六率 三少 三少 四少

四六六六 一一一 又十率一
四六六六六 一二一一 又十二率四少
四六六六六六 一二一一一 又十四率六多
四六六六六六六 一二一一一一 又十六率四少

第二率〇〇 〇
四 第四率〇一 〇
四六 一 第六率〇 〇
四六六 二一 第八率一 〇
六六六 一二一 第十率 一

四六六六 一二一 第十率一

十六分十率之三多四分又四次十六分十二率之三少四分又五次十六分十四率之一與四分又二次十六分八率之一等次另書八率相等數于上四率相等數于下乘除得四分又三次十六分十率之一少四分又四次十六分十二率之四多四分又五次十六分十四率之六少四分

第二率
又四率
又六率
又八率
又十率
又十二率
又十四率
又十六率

第二率
第四率
第六率
第八率
第十率
第十二率
第十四率
第十六率

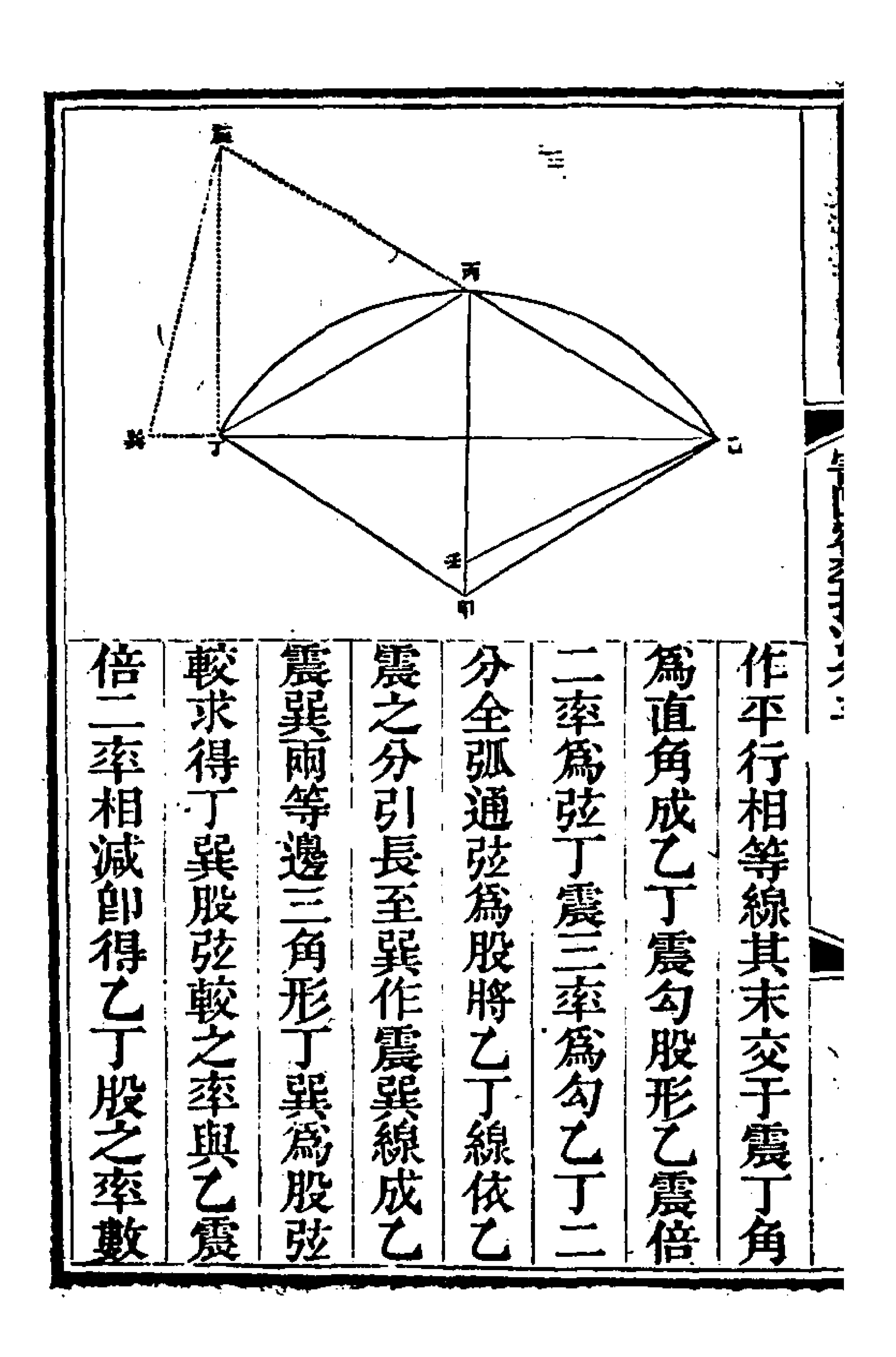
又六次十六分十六率之四與四分又三次十六分十率之一等次另書十率相等數于上四率相等數于下乘除得十二率一分分母如前少十四率五分多十六率十分與十二率一分等次另書十二率相等數于上四率相等數于下乘除得十四率一分少十六率六分與十四率一分等次另

	一	二	三	四	五	六
又四率	一	一	一	一	一	一
又六率	一少	○	○	○	○	○
又八率	○二少	二少二	○	○	○	○
又十率	○一多	一多六少	五少	○	○	○
又十二率	○	○六多	六多二○少	一四少一四	○	○
又十四率	○	○二少	二少三○多	二八多七○少	四二少四二	○
又十六率	○	○	○二○少	二○少一四○多	一二○多一三二少	一三二○
第四率	一	一	一	一	一	一
第六率	○	一多	一多	一多	一多	一多
第八率	○	○	二多	二多	二多	二多
第十率	○	○	○	五多	五多	五多
第十二率	○	○	○	○	一四多	一四多
第十四率	○	○	○	○	○	四二多
第十六率	○	○	○	○	○	一三二多

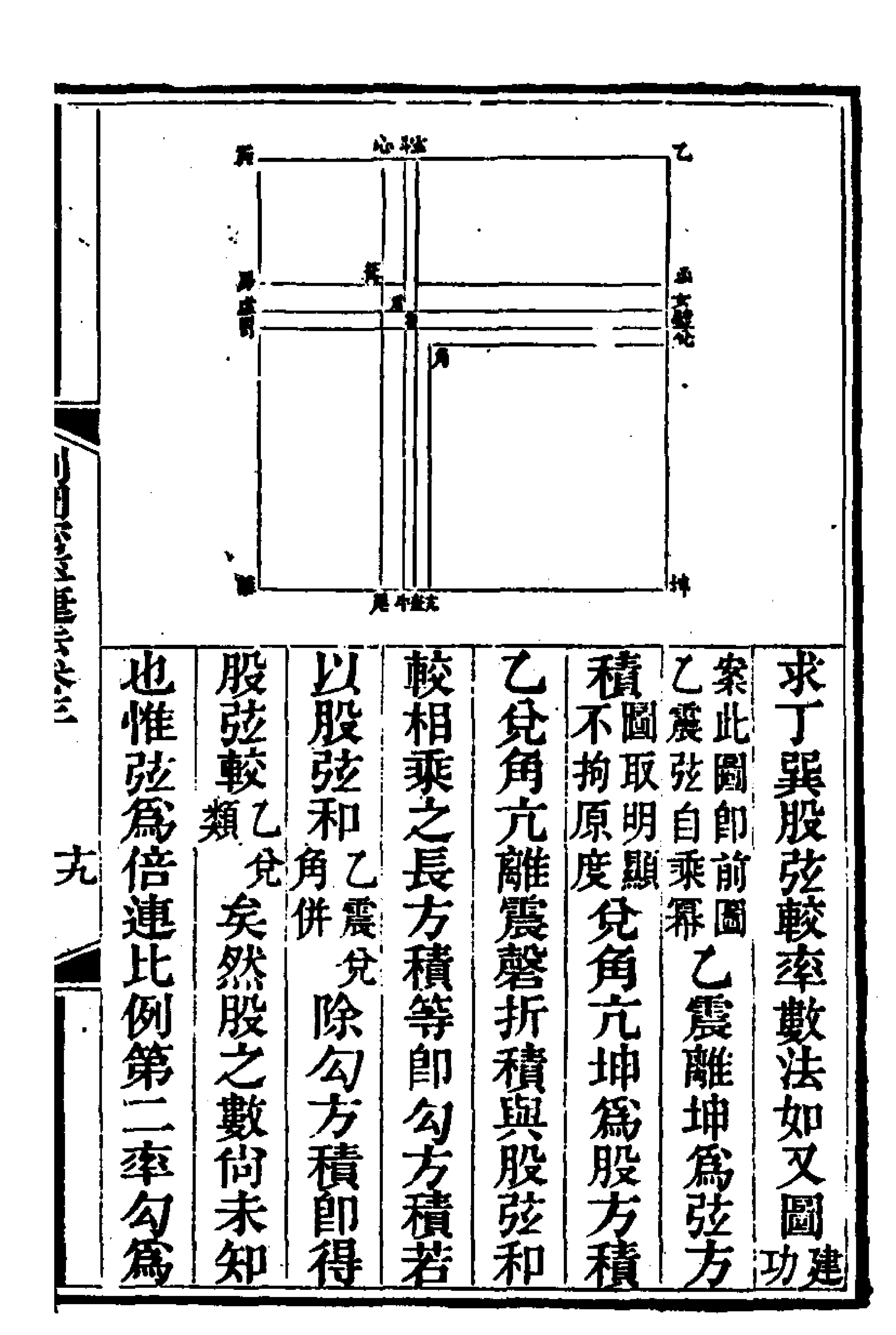
書十四率相等數于上四率相等數于下乘除得十六率一分與十六率一分等既得各率相等數乃置四率相等數于上依右所少數取左右相等數累加之俱如前法得右四率一分與左四率一分多六率一分八率二分十率五分十二率十四分十四率四十二分十六率一百三十二分等左

得數即四分第四率之一戊亥求四分又四四率之一庚辛即戊辛辛乾併之其率數也倍二率減去式見上四分四率之一及各率分數庚辛得二二率少四分四率之一四分又十六分六率之一四分又一次十六分八率之二四分又三次十六分十率之五四分又四次十六分十二率之十四四分又五次十六分十四率之四十二四分又六次十六分十六率之一百三十二爲二分全弧通弦率數與前數悉合也

三法按前圖將乙丙線引長至震爲乙丙之倍自丁點與丙壬



作平行相等線其末交于震丁角爲直角成乙丁震勾股形乙震倍二率爲弦丁震三率爲勾乙丁二分全弧通弦爲股將乙丁線依乙震之分引長至巽作震巽線成乙震巽兩等邊三角形丁巽爲股弦較求得丁巽股弦較之率與乙震倍二率相減卽得乙丁股之率數



求丁巽股弦較率數法如又圖建功

案此圖卽前圖乙震弦自乘羃乙震離坤爲弦方積圖取明顯不拘原度兌角亢坤爲股方積乙兌角亢離震磬折積與股弦和較相乘之長方積等卽勾方積若以股弦和乙震兌角併除勾方積卽得股弦較乙兌類矣然股之數尙未知也惟弦爲倍連比例第二率勾爲

連比例第三率可以相比而取股弦較之率數爰以勾二三率自乘爲實倍弦得四二率爲法除之得乙氐類四分四率之一比股弦較乙兌小一氐兌夫四倍二率爲乙震震離之和以除乙角離震磬折積而得乙氐類是乙角離震磬折積與乙震房氐心震離尾長方積併等亦卽與乙箕離震磬折積震箕平方積併等而震箕平方積必與氐角尾箕磬折積等乙箕離震磬折積加震箕平方積與乙角離震磬折積等同減一乙箕離震磬折積則所餘之氐角尾箕磬折積震箕平方積必爲相等次求氐兌之差以四分四率之一自乘得震箕方積與氐角尾箕磬折積

等若以氐箕兌角二邊折除之卽得氐兌類相差之數矣然兌角之數亦未知也惟震箕四率之方積與二率可以爲比乃以震箕方積爲實仍以四二率爲法除之得氐女類四分又十六分六率之一 比股弦較乙兌 尚小一女兌夫四二率爲氐房心尾之和以除氐角尾箕磬折積而得氐女類是氐角尾箕磬折積與氐虛斗尾二長方積併等亦卽與女箕尾危心危虛箕二磬折積併等則心危虛箕磬折積必與女角牛危磬折積等 氐危尾箕 磬折積加心危虛箕磬折積與氐角尾箕磬折積等同減一氐危尾箕磬折積則所餘之心危虛箕女角牛危磬折積必爲相

等而心危虛箕磬折面之廉長即四分四率之一隅即六率數乃倍四率數爲廉法以六率數爲隅法相加得廉隅共法以隅法乘之得心危虛箕磬折積與女角牛危磬折積等以四二率除之得女壁類四分又二次十六分八率之二多四分又三次十六分十率之一比股弦較乙兌尚小一壁兌依前理推之則壁角斗婁磬折積必與斗婁胃危磬折積等依前法求得廉隅共積以四二率除之得女壁外之十率數必仍小于壁兌而室婁胃震方外附之磬折積又可以求壁兌之差焉是股弦較方所

得之四率數猶初商也六率八率猶次商三商也用連比例率數推之故先求得初商而後用初商平方積以求次商得次商而後用次商廉隅積以求三商準此而遞推之則股弦較之率數密矣今詳著算式于後以與圖互發焉法置二率一根乙丙倍之得二二率爲弦乙震以三率一根丁震爲勾勾自乘倍弦得四二率除之得四分四率之一四二率爲除法書四

二率 二二 一 乙丙 乙震

三率 一 丁震

倍于二率上三率自乘降位代二率除率上書分母四代四除餘同前

爲股弦較初商心箕次以初商四分四

初商 ○ ○ 一
四倍二率○○
三率二一
四分四率

次商 ○ 一 一
四倍二率○○
四分四率二一
十六分六率

三商 ○ ○ ○ 二 一多
次商廉隅
四倍二率○○
四分四率二○
四十六分六率一多二
四十六分一十六八率
四十六分六十二十率

率之一自乘四二率除之得四分又十六分六率之一四分之一自乘得十六分之一又四除之故得四分又十六分之一爲股弦較次商斗心次倍初商得四分四率之二爲廉法以四分又十六分六率之一爲隅法相加得四分四率之二多四分又十六分六率之一爲廉隅共法以隅法四分又十六分六率之一乘之得斗危虛箕礐

三商 廉 隅

四倍二率 ○ ○ ○ ○
四 四率 二 ○ ○ ○
四六 一六率 二多 ○ ○ ○
四六 一六八率 二多 三 ○ ○
四六六 一一十率 二多 二多 四 ○ 四
四六六 一一一十二率 四多 二 六多
四六六六 一一一一十四率 四多 二多 六多
四六六六六 一一一一一十六率 二多 三多 四多

四商

折積以四倍二率除之得四分又二次十六分八率之二四分與四分又十六分相乘得二次十六分又四除之故得四分又二次十六分多四分又三次十六分十率之一四分又十六分自乘得三次十六分又四除之故得四分又三次十六分下仿此爲三商數斗室次倍初商次商共數爲廉法三商數爲隅法相併以隅法乘之四倍二率除之得四分又三次十六分十率

四商廉隅

二率 四率 六率 八率 十率 十二率 十四率 十六率

五商

五商廉隅

二率 四率 六率 八率 十率 十二率 十四率 十六率

六商

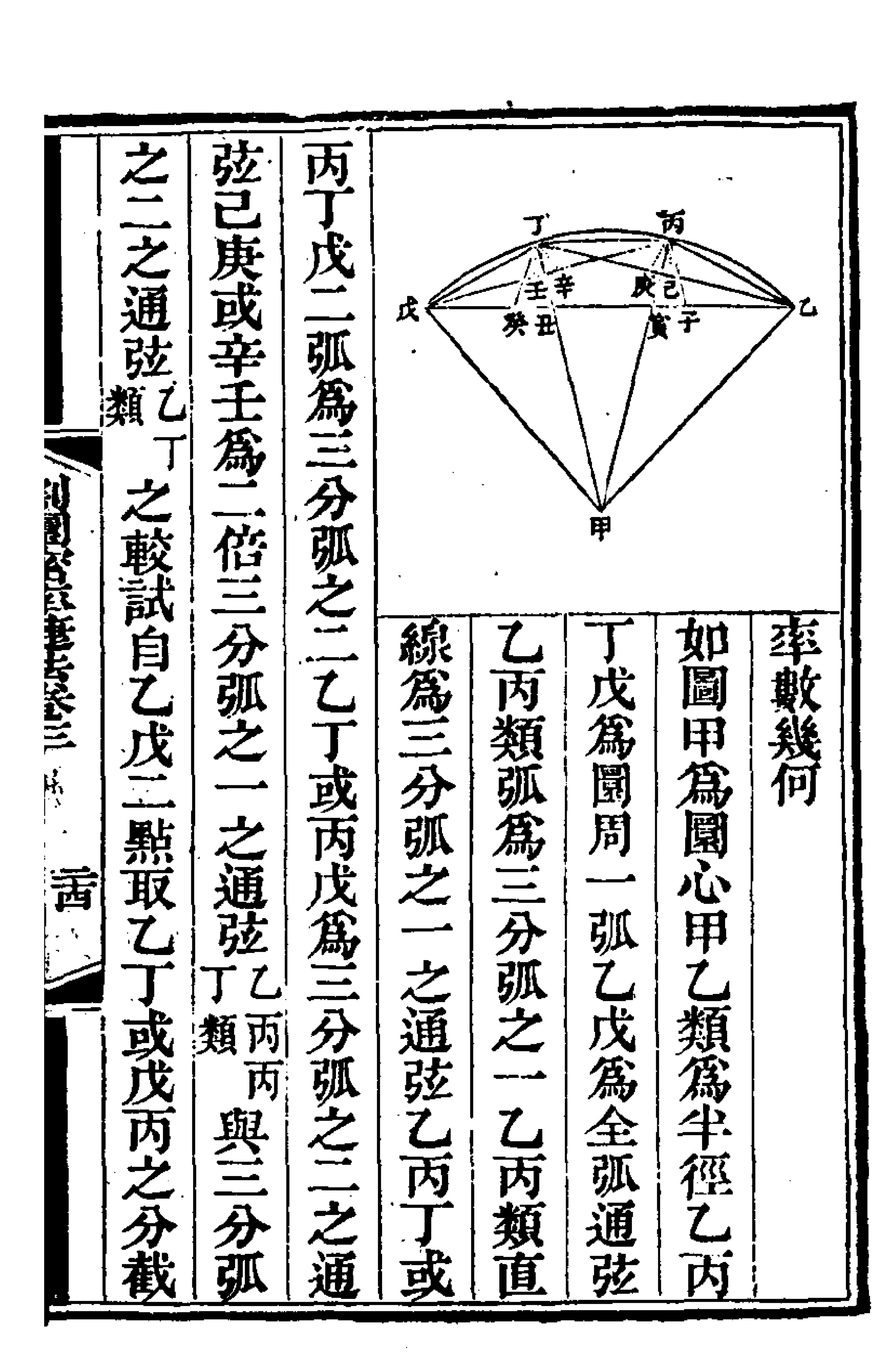
之四多四分又四次十六分十二率之六四分又五次十六分十四率之六四分又六次十六分十六率之四爲四商數次倍前三商其數爲廉法四商數爲隅法相併此條廉隅共法至八率已足用書至十六率以備其數下同以隅法乘之四倍二率除之得十二率八分分母俱同前多十四率二十分十六率四十分爲五商

數次倍前四商共數為廉法五商數為隅法相併以隅法乘之四倍二率除之得十四率十六分多十六率五十六分為六商數次倍前五商共數為廉法以六商數為隅法相併以隅法乘之四倍二率除之得十六率三十二分為七商數併諸商數得四率一分多六率一分八率二分十率五

分十二率十四分十四率四十二分十六率一百三十二分爲
股弦較率數置弦數二三率減去股弦較率數得股率數爲二
分全弧通弦之率數亦與前同也
設有本弧之通弦率數求二倍弧之通弦率數
法同前本弧之通弦加一分弧之通弦二倍弧之通弦如二分
全弧之通弦後仿此
設圜周一弧三分之命圜半徑爲連比例第一率一分弧通弦
爲連比例第二率二分弧通弦率數如前題所得求全弧通弦

率數幾何

如圖甲為圜心甲乙類為半徑乙丙丁戊為圜周一弧乙戊為全弧通弦乙丙類弧為三分弧之一乙丙類直綫為三分弧之一之通弦乙丙丁或



丙丁戊二弧為三分弧之二乙丁或丙戊為三分弧之二之通弦己庚或辛壬為二倍三分弧之一之通弦乙丙丙丁類與三分弧之二之通弦乙丁類之較試自乙戊二點取乙丁或戊丙之分截

乙戊全弧通弦于癸于子自丙丁二點至癸子二點作丁癸丙子二線又與丁癸丙子相等作丁丑丙寅二線成乙丁癸丁癸丑戊丙子丙子寅二相等連比例三角形與乙丙庚丙庚己類丁丙己丙丁壬戊丁辛三形皆與之等之連比例三角形為同式形二乙角所對之丙丁丁戊二弧二戊角所對之乙丙丙丁二弧皆為三分弧之一則角必等故為同式餘已見前甲乙類半徑為連比例第一率乙丙類三分弧之一之通弦為連比例第二率則丙庚類為第三率己庚類為第四率以乙丙與己庚之比同于乙丁或戊丙與癸丑或子寅併之比而得癸丑子寅併然後倍

乙丁或丙戊得乙戊多一癸子減去癸丑子寅併尙多一寅丑與丙丁等丙丁癸寅丙丁丑子二形之四邊俱兩兩平行故必等再減一丙丁得乙戊卽

全弧通弦求率數法借一根爲三分弧之一之通弦乙丙類爲第

二率三○二

四率○少一多一少一二

四六 一六 六率○少一多一少一多一少一四三多

四六 一六 八率○少二多二少二多二少二四四多

四六六 一六 十率○少五多五少五多五少八四八○多

四六六 一六 十二率○少一四多一四少一四多一四少二○八八三八多

四六六 一六 十四率○少四二多四二少四二多四二少五八六二六二五八四多

四六六 一六 十六率○少一三二多一三二少一三二多一三二少一六八六五○四四四三○六六八二六四多

二　二少　四少　一○少　二八少　八四少　二六四少

二率倍之得二二率減去三分弧之二之通弦乙丁類率數前題所得得四率一分分母數俱同前多六率一分八率二分十率五分十二率十四分十四率四十二分十六率一百三十二分爲倍一

乘減減

二率三四　四二三　二率三

四率一少　二少　二多　四少　四少　四率一少

六率一少　二少　二少　○

八率二少　四少　四少　○

十率五少　一〇少　一〇少　○

十二率一四少　二八少　二八少　○

十四率四二少　八四少　八四少　○

十六率一三二少　二六四少　二六四少　○

分弧通弦率數與二分全弧通弦率數之較庚己類乃以所得率數較與二分全弧通弦率數相乘以二率除之以下條逐位數乘上條乘訖併之多少異號者相減少數大從少號餘同前得四率二分少六率二分八率四分十率十分十二率二十八分十四率八十四分十六率二百六十四分爲應減四率數倍二分弧通弦率數減去所得四率率數再減去一分弧通弦一二率得

三二率少四分四率之四即三二率少一四率爲全弧通弦率數也

又法借一根爲半徑爲連比例第一率又借一根爲一分弧通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率二三率相乘一率除之得第四率然後三因第二率減一第四率得三二率少一四率即全弧通弦率數如圖甲爲圜心甲乙類爲半徑乙丙丁戊爲全弧乙戊爲全弧通弦乙丙類弧爲一分

一率○○○○○
二率二○一○
三減三
三率一○○○○
四率一○一一少

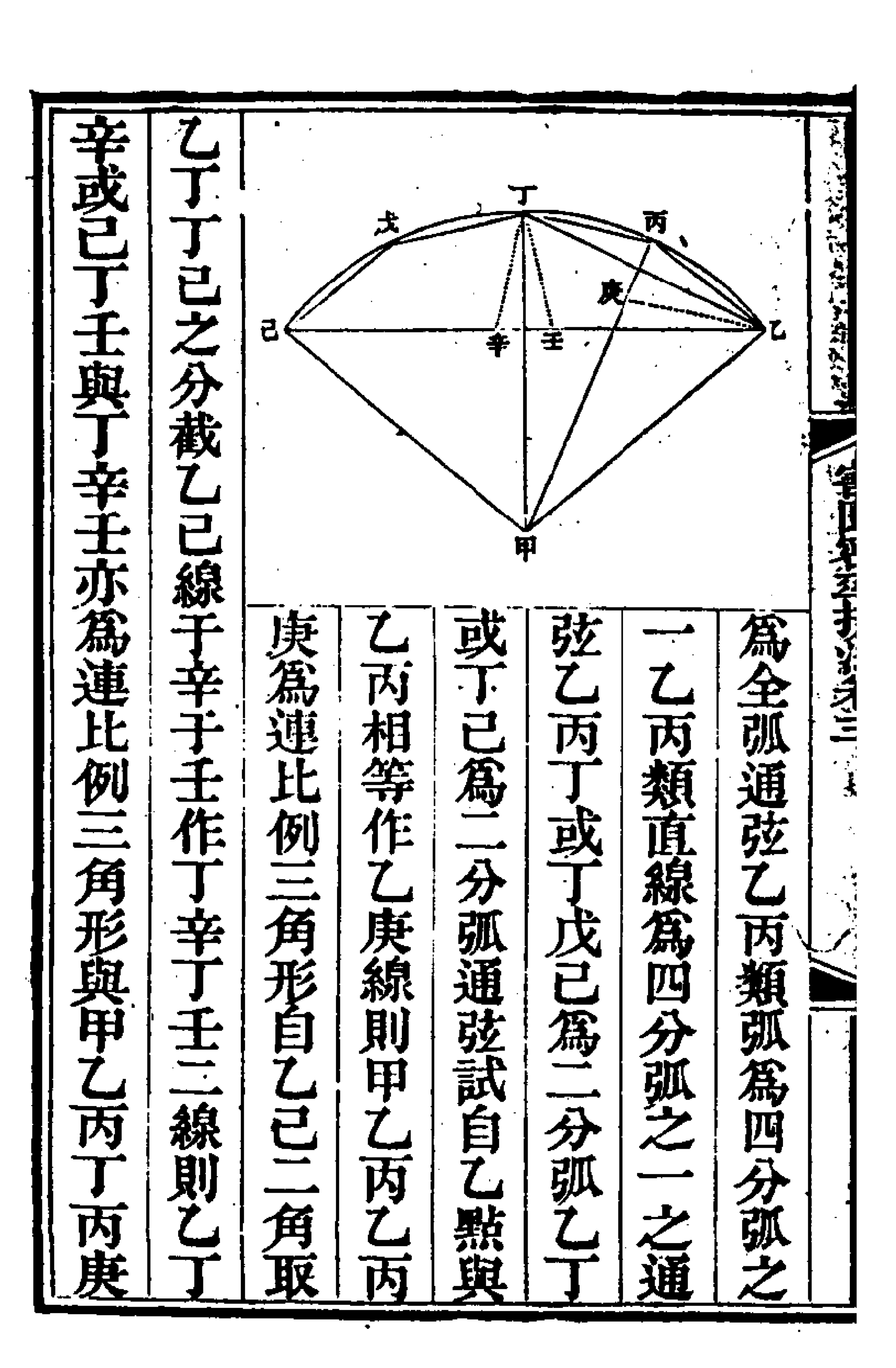


弧乙丙類直線爲一分弧通弦試自丙丁二點與丁辛丙壬相等作丁己丙庚二線成甲乙丙乙丙壬丙壬庚與甲戊丁戊丁辛丁辛己相等兩連比例三角形甲乙類爲一率乙丙類爲二率丙壬類爲三率庚壬類爲四率乙丙與乙壬等戊丁與戊辛等丙丁與己壬或庚辛亦等庚丙壬己丁辛二角與丙甲丁角等則丙庚與丁辛丁己與丙壬爲平行而丙丁與己壬或庚辛又爲平行故必相等故三因乙丙類得乙戊多一己

辛戊庚壬減去一己辛戊庚壬得乙戊爲三二率少一四率卽全弧通弦率數也此法甚易然與前法不能相通故置爲又法若依本法逐分求之卽可推至無窮但逐層乘除未免數繁今設隔一分加減法於後

設有圜周一弧四分之命圜半徑爲連比例第一率一分弧通弦爲連比例第二率二分弧通弦率數如前題所得求全弧通弦率數幾何

如圖甲爲圜心甲乙類爲半徑乙丙丁戊己爲圜周一弧乙己



爲全弧通弦乙丙類弧爲四分弧之一乙丙類直線爲四分弧之一之通弦乙丙丁或丁戊己爲二分弧乙丁或丁己爲二分弧通弦試自乙點與乙丙相等作乙庚線則甲乙丙乙丙庚爲連比例三角形自乙己二角取乙丁丁己之分截乙己線于辛于壬作丁辛丁壬二線則乙丁辛戊己丁壬與丁辛壬亦爲連比例三角形與甲乙丙丁丙庚

	二率	四率	六率	八率	十率	十二率	十四率	十六率
	二率二 二	四 四率 一八	四 一六 六率 一少 一六少	四 一六六 八率 一三少 一六多	四 一六六六 二十率 五少 三二多	四 一六六六六 二二十二率 一四少 八〇少	四 一六六六六六 二二二十四率 四二少 二二四少	四 一六六六六六六 二二二二十六率 一二二少 六七二少
乘	三	一少	一少	二少	五少	一四少	四二少	一三二少
減	三 四	二少 八多	二少 一六少	四少 一六少	一〇少 三二少	二八少 八〇少	八四少 二二四少	二六四少 六七二少
	、円	一〇少	一四多	一二多	二二多	五二多	一四〇多	四〇八多

連比例三角形爲同式形解見前第一題以甲乙半徑與丙庚之比同于乙丁或丁巳與辛壬之比而得辛壬然後倍乙丁或丁巳得乙巳多一辛壬減去一辛壬即乙巳全弧通弦今按乙丁通弦率數即前二分全弧通弦率數

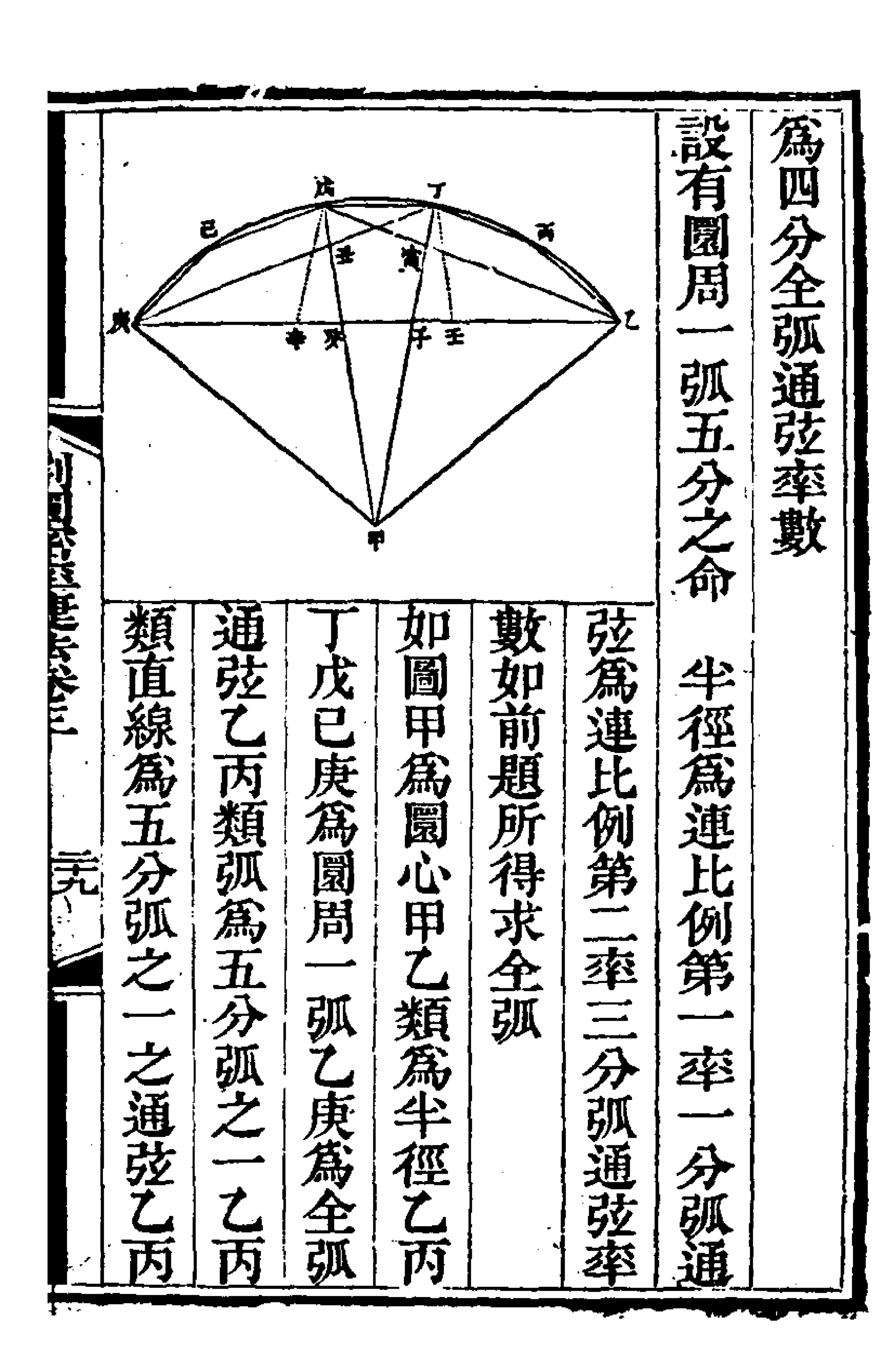
甲乙與丙庚爲第一率與第三率相比則乙丁或巳丁率數降二位二率降爲四率四率降爲六率即可得辛壬率數乃將二

卽如三率乘一率除下倣此

分全弧通弦率數（見前）降二位得四率八分少六率十六分八率十六分十率三十二分十二率八十分十四率二百二十四分十六率六百七十二分為應減四率分數次置二分全弧率數二因之得四二率少四率二分六率二分八率四分十率十分十二率二十八分十四率八十四分十六率二百六十四分減去前所得四率分數（少減少得數仍為少下數大反減得數得變為多多減少則相加得數仍為少）四二率少四率十分多六率十四分八率十二分十率二十二分十二率五十二分十四率一百四十分十六率四百零八分

爲四分全弧通弦率數

設有圜周一弧五分之命　半徑爲連比例第一率一分弧通



弦爲連比例第二率三分弧通弦率

數如前題所得求全弧

如圖甲爲圜心甲乙類爲半徑乙丙

丁戊已庚爲圜周一弧乙庚爲全弧

通弦乙丙類弧爲五分弧之一乙丙

類直線爲五分弧之一之通弦乙丙

戊或丁戊庚爲三分弧乙戊丁庚爲三分弧通弦試自乙庚二點取乙戊或丁庚之分截乙庚線于辛于壬作戊辛丁壬二線與甲丁甲戊二半徑各爲平行依前解乙戊辛與甲丁戊形同式辛角必與甲丁戊角等丁戊辛子四邊形丁辛二角形丁戊子辛二線平行則戊子二角必等戊辛丁子二線必平行丁戊癸壬形同成乙戊辛戊辛癸與庚丁壬丁壬子相等兩連比例三角形與甲丁戊丁戊丑或戊丁寅連比例三角形爲同式形解見前以甲丁類半徑與戊丑或丁寅之比同于乙戊或丁庚與辛癸或壬子之比既得辛癸或壬子則倍乙戊或丁庚得乙庚多一辛壬減去辛癸

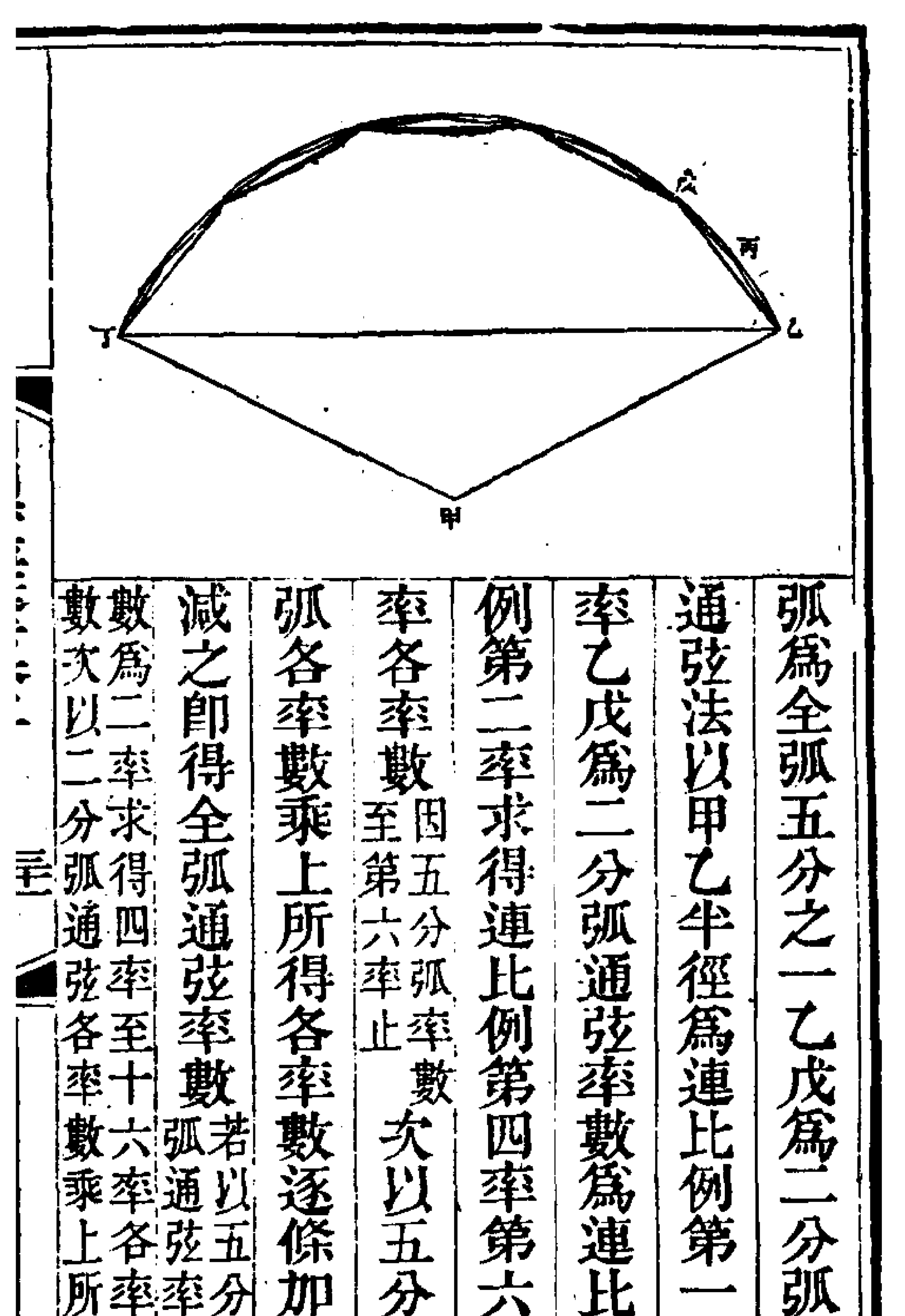
二率　四率　六率

或壬子尚多一　辛子或壬癸與丁戊等（解見前）再減一　戊丁即得乙庚爲全弧通弦率數法置三分弧通弦率數（見前）降二位得三四率少一　六率次置三分弧通弦率數二因之得六二一率少二四率減去前所得四率數得六二二率少五四率多一　六率再減去一分弧通弦率數一二率（上取隔三位者減之如六分弧則減二分弧者七分弧則減三分弧者）得五二二率少五四率多一　六率爲五分全弧通弦率數按此隔一分加減之法較

逐位遞求者固爲易矣然析至千萬分亦不勝其繁故又設以兩分數弧通弦率數求兩分數乘得一分數弧通弦率數之法于後

設圜半徑爲連比例第一率一分弧通弦爲連比例第二率二分全弧通弦率數五分全弧通弦率數俱如前題所得求十分二五相乘之數全弧通弦率數幾何

如圖甲爲圜心甲乙類爲半徑乙丙丁爲十分全弧乙丁爲全弧通弦乙丙爲一分弧其直線爲一分弧通弦乙丙戊爲二分



弧爲全弧五分之一乙戊爲二分弧通弦法以甲乙半徑爲連比例第一率乙戊爲二分弧通弦率數爲連比例第二率求得連比例第四率第六率各率數（因五分弧率數至第六率止）次以五分弧各率數乘上所得各率數逐條加減之即得全弧通弦率數（若以五分弧通弦率）數爲二率求得四率至十六率各率數次以二分弧通弦各率數乘上所

一率〇〇〇 [illegible] 〇

二率三〇 [illegible] 〇

三率〇〇四〇 [illegible] 四三率四

四率一二少少〇〇 [illegible] 〇

五率〇〇三三少少〇 [illegible] 四少五率一少

六率二二少少〇〇〇 [illegible] 〇

七率〇〇二四二 [illegible] 〇

八率三三少少〇〇〇 [illegible] 〇

九率〇〇四四四四 [illegible] 〇

十率 [illegible] 〇〇〇〇〇

十一率 [illegible] 〇

十二率 [illegible] 〇

十三率 [illegible] 〇

十四率 [illegible] 〇

十五率 [illegible] 〇

十六率 [illegible] 〇

得各率數加減之亦得蓋以二分弧爲一分弧十分全弧爲五分全弧立算也布算之式先置二分全弧通弦率數自乘一率除之得四三率少四分五率之四卽四三率少一五率爲三率率數次以三率率數與二率率數相乘一率除之得四率三十二分少六率一百九十二分多八率一百九十二分

率	率數		
一率	〇〇	[illegible]	[illegible]
二率	三〇〇	[illegible]	[illegible]
三率	〇四〇	[illegible]	[illegible]
四率	一〇三二	三二	[illegible]
五率	〇一少	[illegible]	[illegible]
六率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
七率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
八率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
九率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
十率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
十一率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
十二率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
十三率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
十四率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
十五率	[illegible]	[illegible]	[illegible]
十六率	[illegible]	[illegible]	[illegible]

十率一百二十八分十二率一百九十二分十四率三百八十四分十六率八百九十六分爲四率率數又以三率率數與四率率數相乘一率除之得六率二千零四十八分少八率二萬零四百八十分多十率六萬一千四百四十分少十二率四萬零九百六十分十四率二萬零四百八十

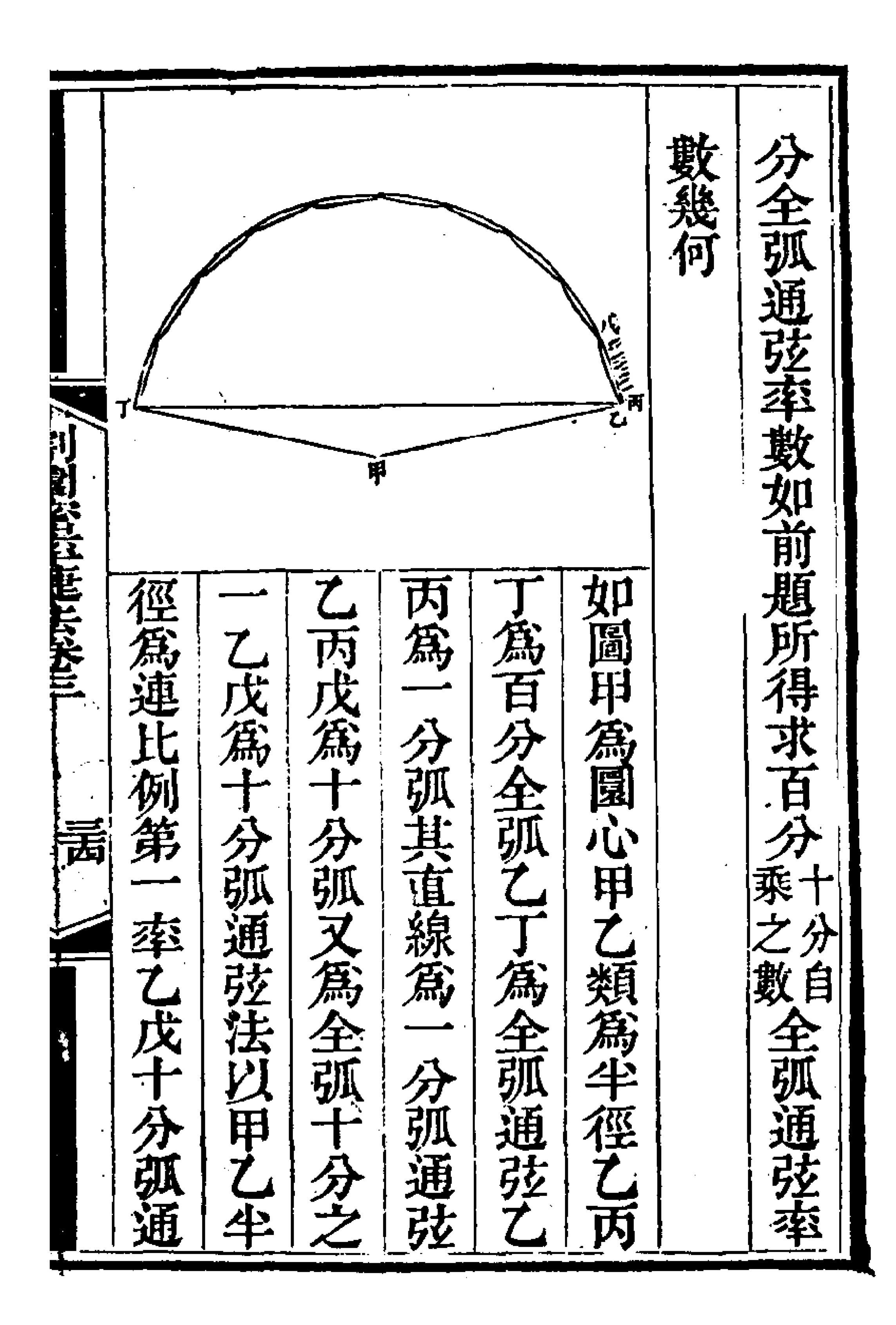
乘	二率三五	四四率一少	四六一六率一少	四六一六八率二少	四六六六一二十率五少	四六六六一二二十二率一四少	四六六六六一二二二十四率四二少	四六六六六六一二二二二十六率一三二少
第一條	一〇	五少	五少	一〇少	二五少	七〇少	二一〇少	六六〇少
或減		一六〇	九六〇少	九六〇多	六四〇多	九六〇多	一九二〇多	四四八〇多
第二條	一〇	一六五少	九五五多	九七〇少	六六五少	一〇三〇多	二一三五〇少	五一四〇少
加			二〇四八	二〇四八〇少	六一四四〇多	四〇九六〇少	二一四八〇少	二四五七六少
第三條	一〇	一六五少	三〇〇三多	二一四五〇少	六〇七七五多	四一九九〇少	二二六一〇少	二九七一六少

分十六率二萬四千五百七十六分爲六率率數既得四率六率率數乃以五分全弧通弦之二率數五偏乘二率率數即二分全弧通弦率數得十倍二率少四率五分六率五分八率十分十率二十五分十二率七十分十四率二百一十分十六率六百六十分爲共二率數爲第一條又以五分全弧

通弦應減之四率率數五偏乘四率率數得四率一百六十分少六率九百六十分多八率九百六十分十率六百四十分十二率九百六十分十二率一千九百二十分十六率四千四百八十分爲應減之共四率數建功案四率率數即前所求得之三十二四率少六率一百九十二分多八率一百九十二分多十率一百二十八分多十二率一百九十二分多十四率三百八十四分多十六率八百九十六分以五分全弧通弦應減之四率率數五偏乘之即得應減之共四率數與第一條相減得十倍二率少四率一百六十五分多六率九百五十五分少八率九百七十分少十率六百六十五分少十二率一千零三十分少十

四率二千一百三十分少十六率五千一百四十分為第二條
又以五分全弧通弦應加之六率率數一徧乘六率率數仍得
前數與第二條相加得十倍二率少四率一百六十五分多六
率三千零三分少八率二萬一千四百五十分多十率六萬零
七百七十五分少十二率四萬一千九百九十分少十四率二
萬二千六百一十分少十六率二萬九千七百一十六分為第
三條即十分全弧通弦率數也
設圜半徑為連比例第一率一分弧通弦為連比例第二率十

分全弧通弦率數如前題所得求百分十分自乘之數全弧通弦率數幾何



如圖甲為圜心甲乙類為半徑乙丙丁為百分全弧乙丁為全弧通弦乙丙為一分弧其直線為一分弧通弦乙丙戊為十分弧又為全弧十分之一乙戊為十分弧通弦法以甲乙半徑為連比例第一率乙戊十分弧通

弦之率數爲連比例第二率求得第四率第六率至第十六率各率數次以十分弧通弦各率共數徧乘所得各率諸數逐條

二率
一〇
一〇
一〇〇

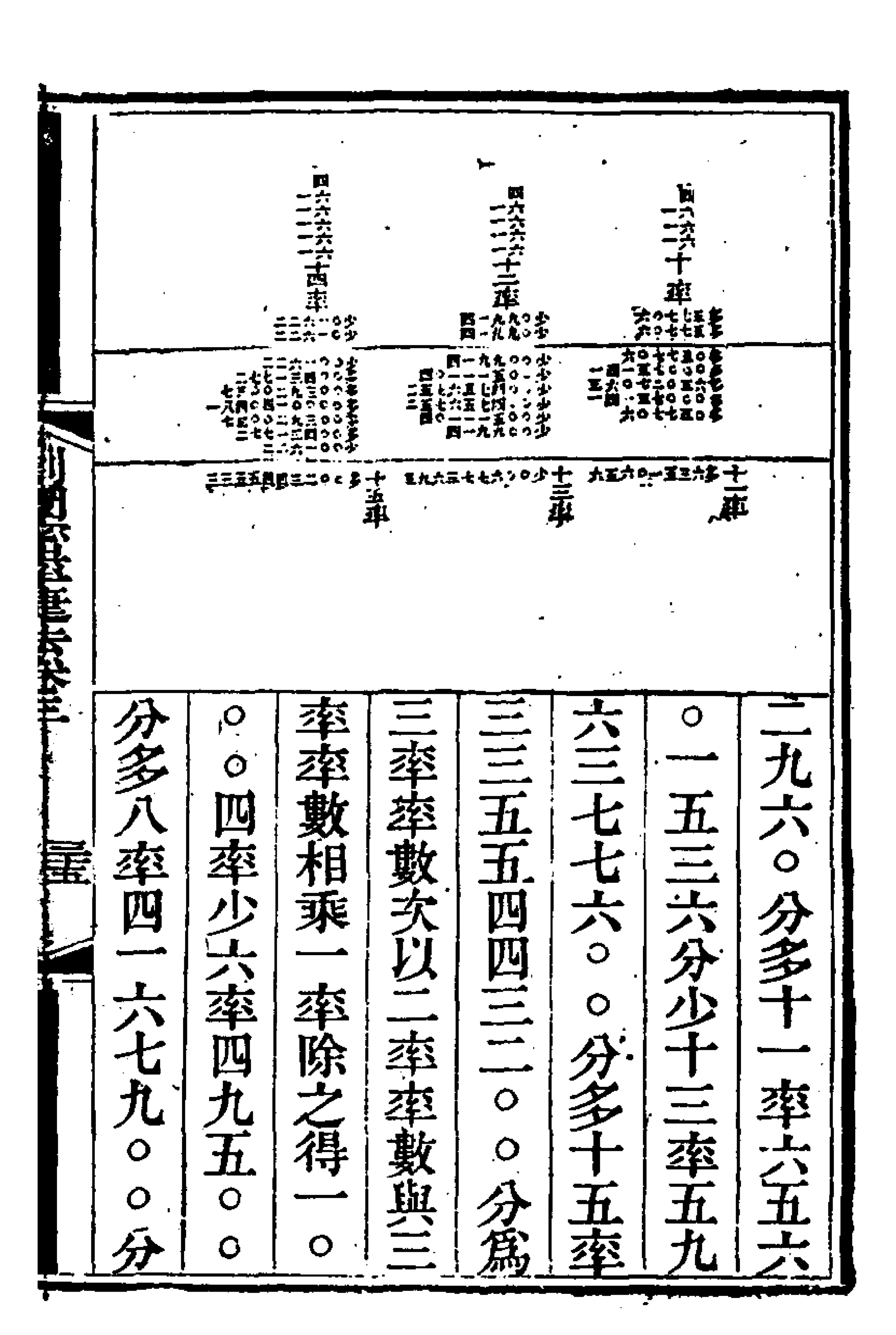
四率
一六五少
一六五少
一六五〇少
一六五〇少

六率
三〇〇三多
三〇〇三多
三〇〇三〇多
一〇八九〇〇多
三〇〇三〇多

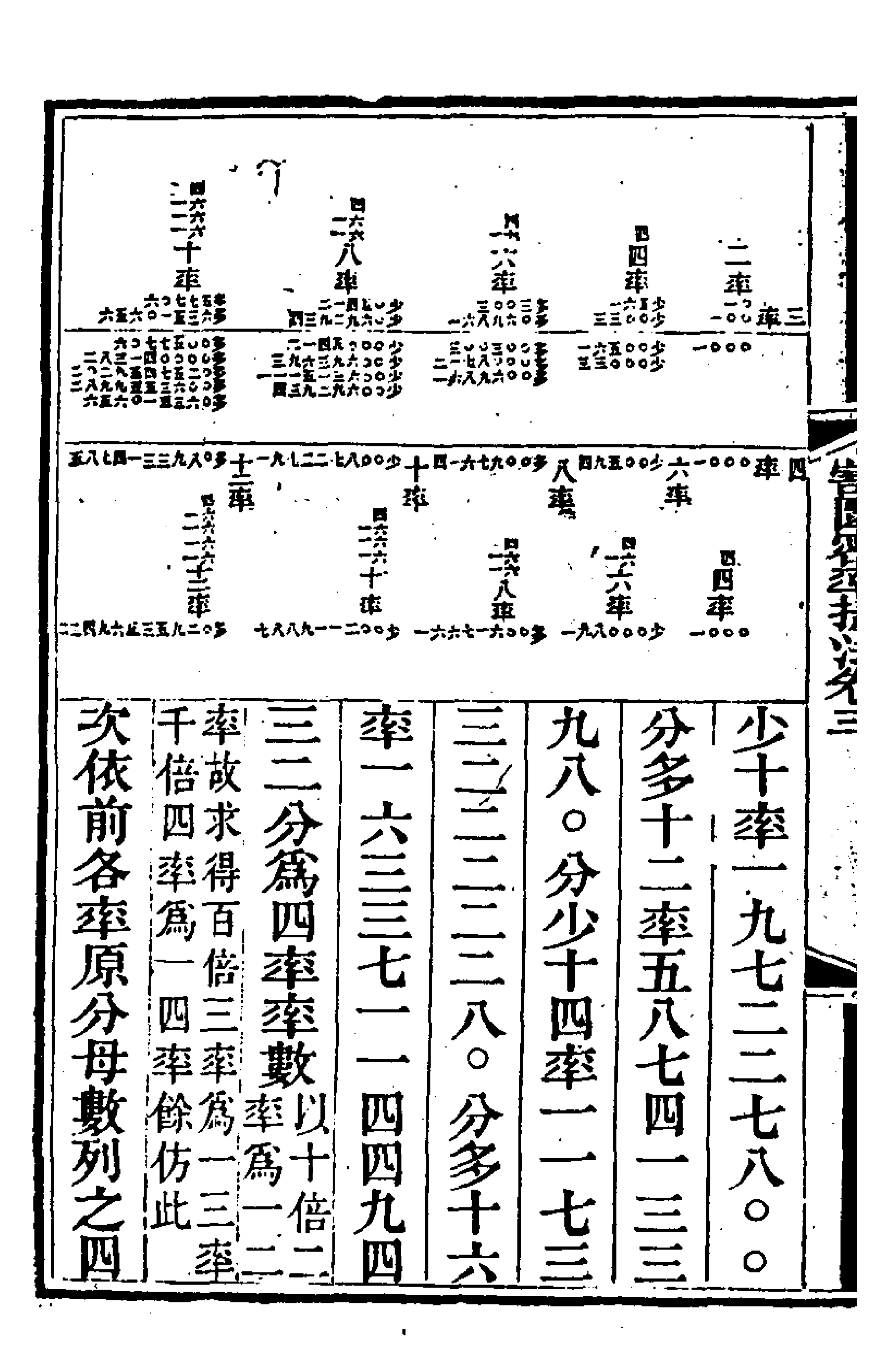
八率
二一四五〇少
二一四五〇少
二一四五〇〇少
一九八一九八〇少
一九八一九八〇少
二一四五〇〇少

三率 一〇〇
五率 三三〇〇少
七率 一六八九六〇多
九率 四三八二九六〇少

加減之即得全弧通弦率數蓋以十分弧爲一分弧以百分全弧爲十分全弧立算也先置十分全弧通弦自乘一率除之得一〇〇此後位數漸多專書九數以便觀覽三率少五率三三〇〇分多七率一六八九九六〇分少九率四三九



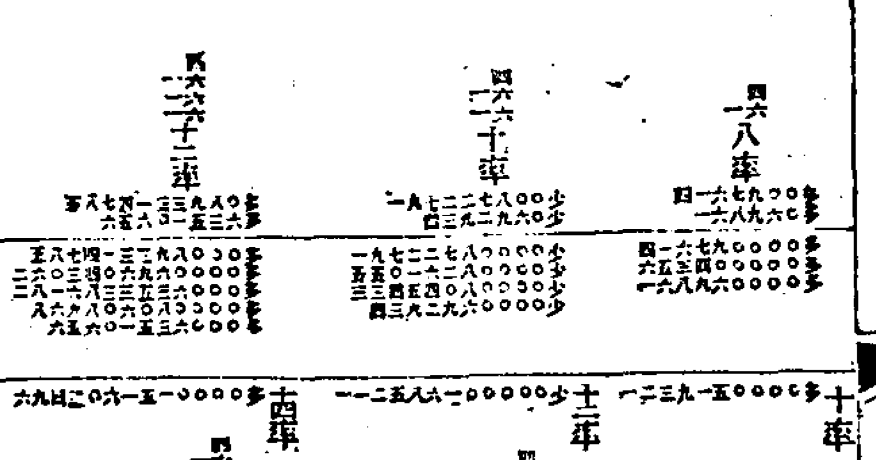
二九六〇分多十一率六五六〇一五三六分少十三率五九六三七七六〇〇分多十五率三三五五四四三二〇〇分為三率率數次以二率率數與三率率數相乘一率除之得一〇〇〇四率少六率四九五〇〇分多八率四一六七九〇〇分



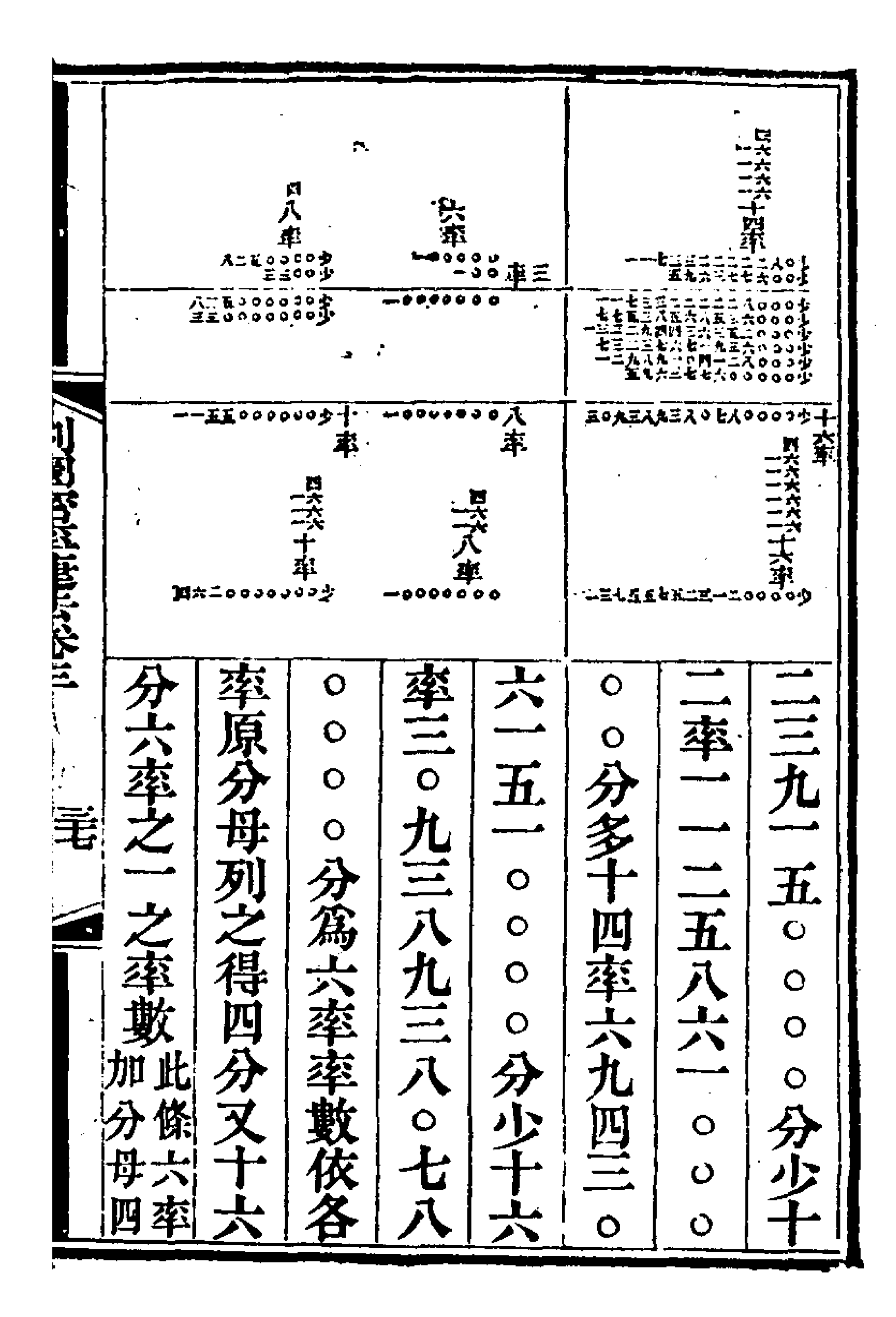
少十率一九七二二七八〇〇分多十二率五八七四一三三九八〇分少十四率一一七三三二二二二二二八〇分多十六率一六三三七一一四四九四三二分爲四率率數以十倍二率爲一二率故求得百倍三率爲一三率千倍四率爲一四率餘仿此

次依前各率原分母數列之四

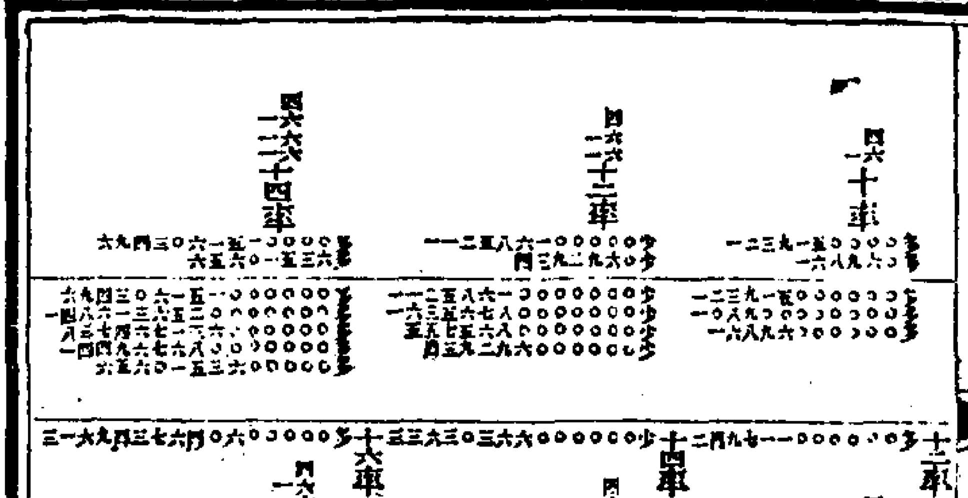
率子數書原數餘率子數以四因之（四率加分母四餘率加分母十六十六爲四之四倍故子數以四因之餘仿此）得四率一〇〇〇分少六率一九八〇〇〇分多八率一六六七一六〇〇分少十率七八八九一一二〇〇分多十二率二三四九六五三五九二〇分少十四率四六九三



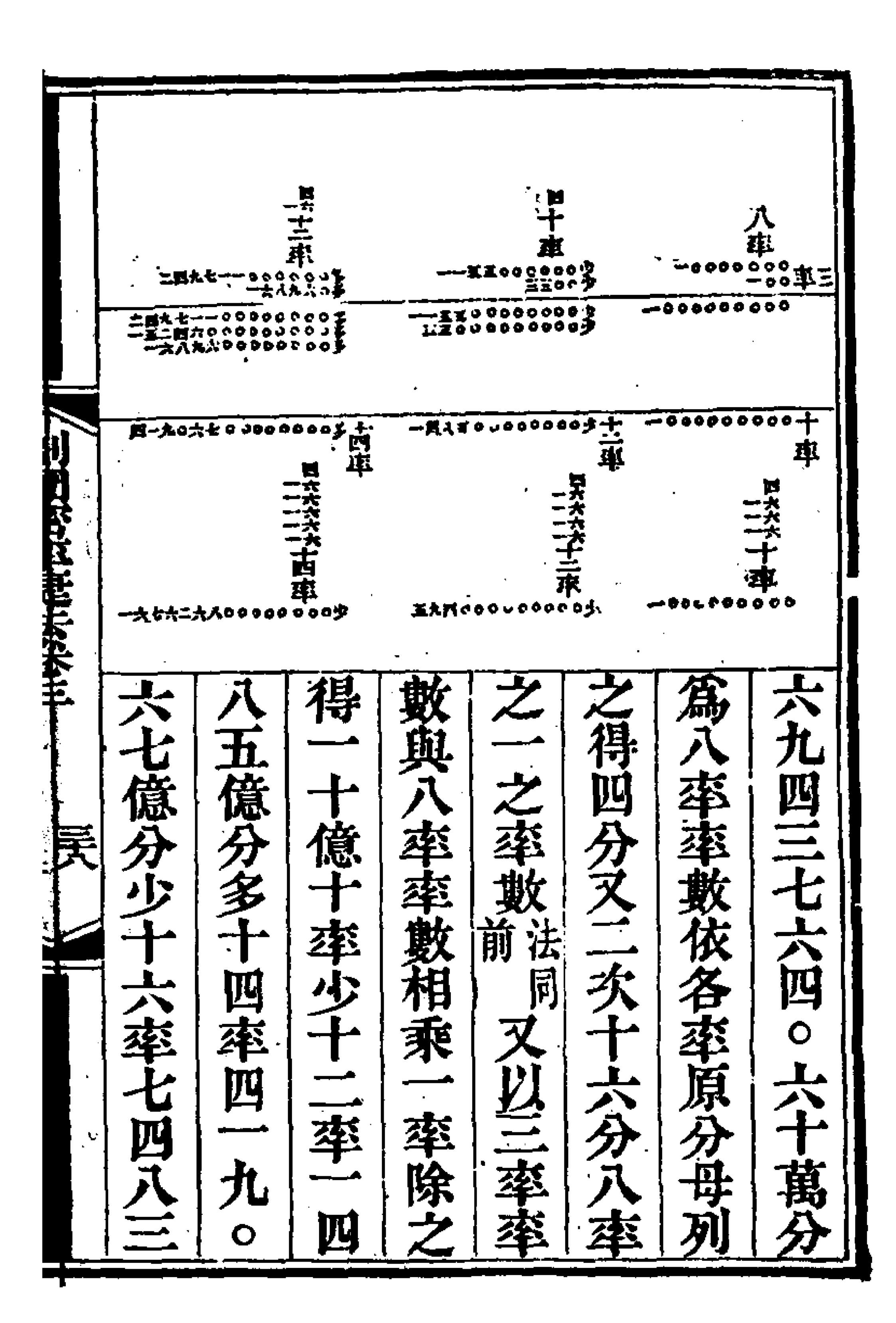
二八八八九一二〇分多十六率六五三四八四五七九七七二八分爲四分四率之一之率數以備後四分四率之共率數相乘之用六八等率同此又以三率率數與四率率數相乘一率除之得一〇〇〇〇〇六率少八率八二五〇〇〇〇分多十率一



二三九一五〇〇〇〇分少十
二率一一二五八六一〇〇〇
〇〇分多十四率六九四三〇
六一五一〇〇〇〇分少十六
率三〇九三八九三八〇七八
〇〇〇〇分爲六率率數依各
率原分母列之得四分又十六
分六率之一之率數此條六率加分母四

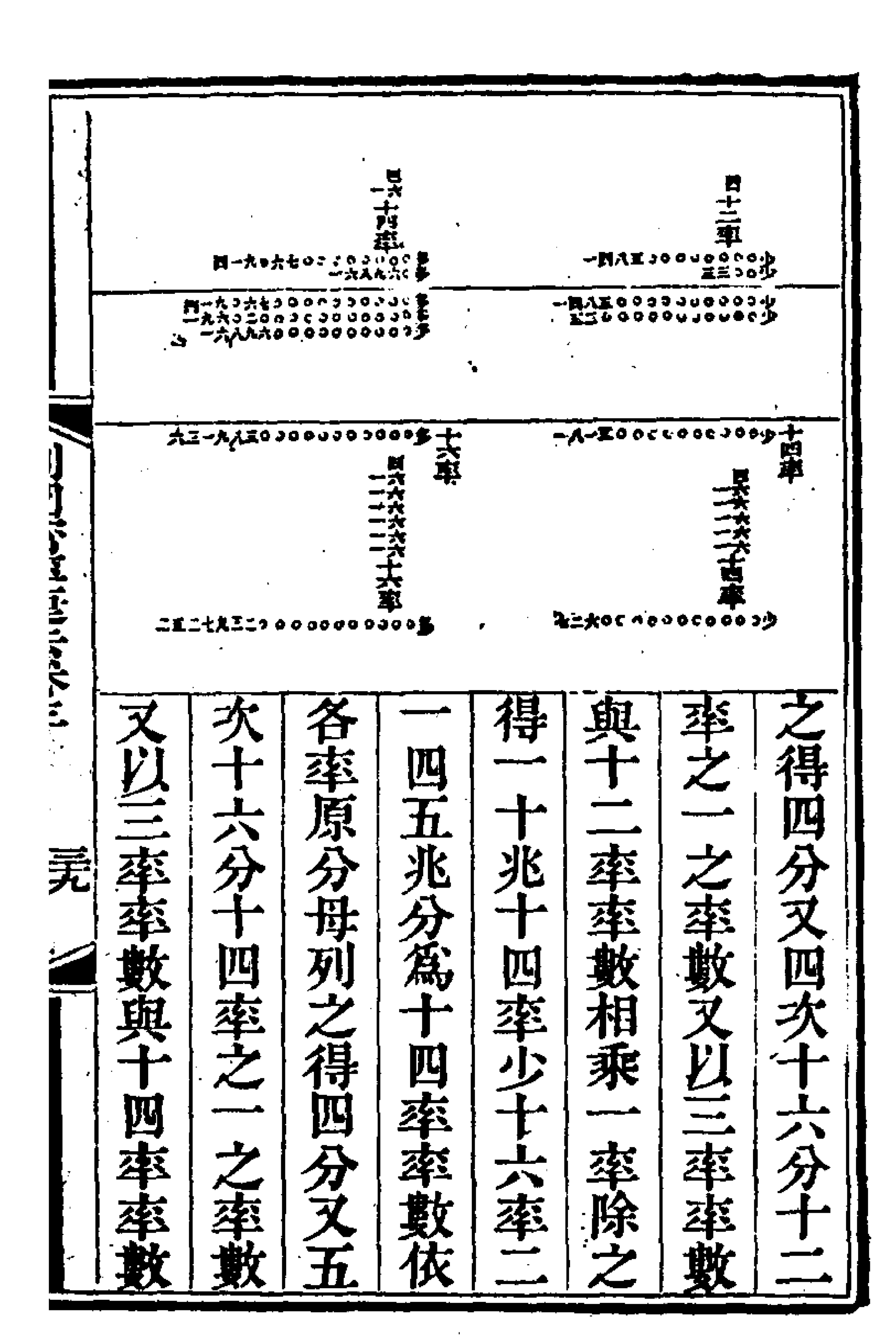


一次十六一次餘率加分母十六二次其一次同爲十六者不計餘一次六率爲加分母四餘率爲加分母十六故六率子數書原數餘率子數四因之又以三率率數與六率率數相乘一率除之得一千萬八率少十率一一五五百萬分多十二率二四九七一一百萬分少十四率三三六三〇三六六百萬分多十六率三三一



六九四三七六四〇六十萬分爲八率率數依各率原分母列之得四分又二次十六分八率之一之率數法同前又以三率率數與八率率數相乘一率除之得一十億十率少十二率一四八五億分多十四率四一九〇六七億分少十六率七四八三

七四六六億分爲十率率數依各率原分母列之得四分又三次十六分十率之一之率數又以三率率數與十率率數相乘一率除之得一千億十二率少十四率一八一五百億分多十六率六八三一九八三百億分爲十二率率數依各率原分母列



之得四分又四次十六分十二率之一之率數又以三率率數與十二率率數相乘一率除之得一十兆十四率少十六率二一四五兆分爲十四率率數依各率原分母列之得四分又五次十六分十四率之一之率數又以三率率數與十四率率數

十率

三率

十四率

十四率

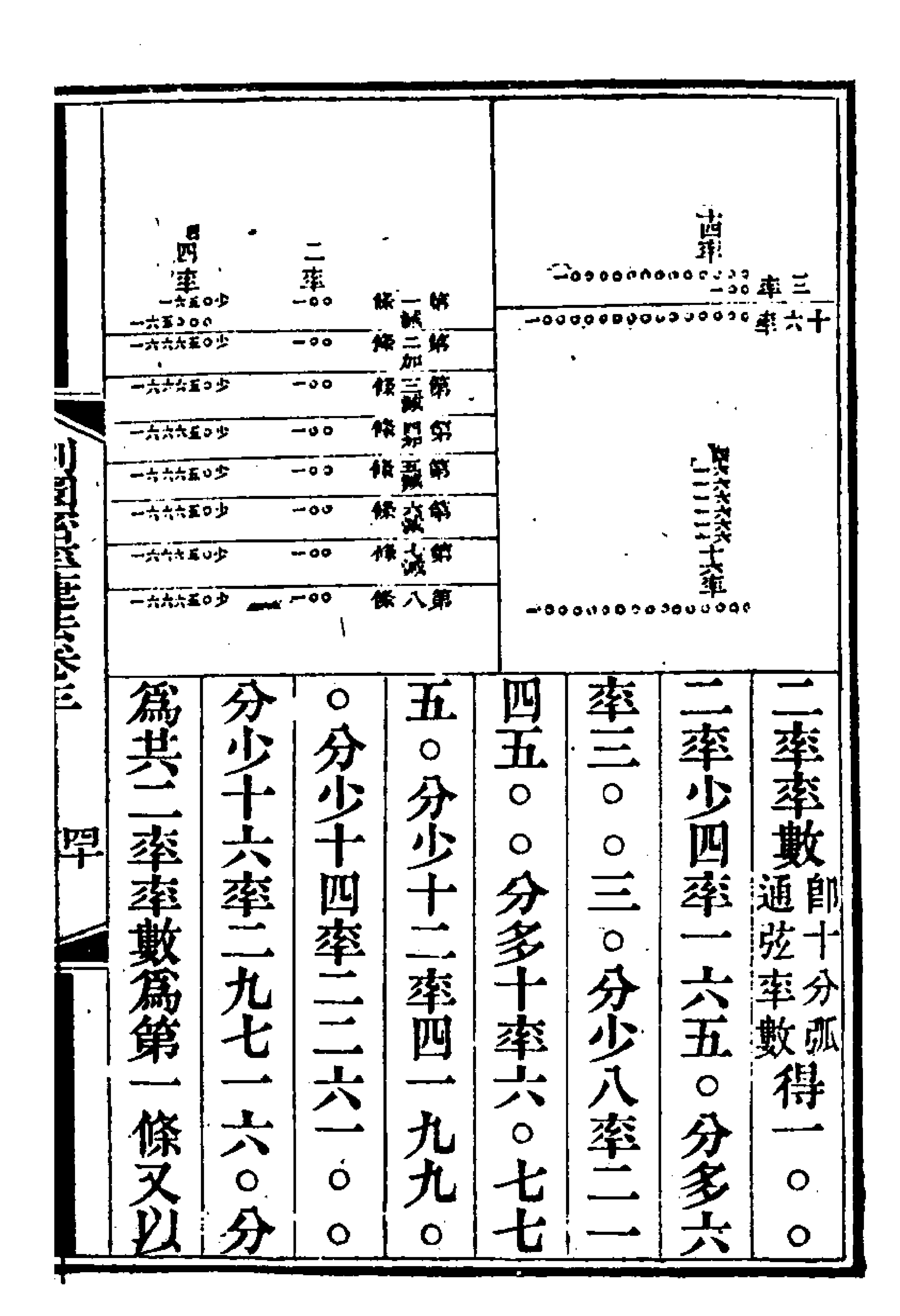
十四率

十六率

十四率

十六率

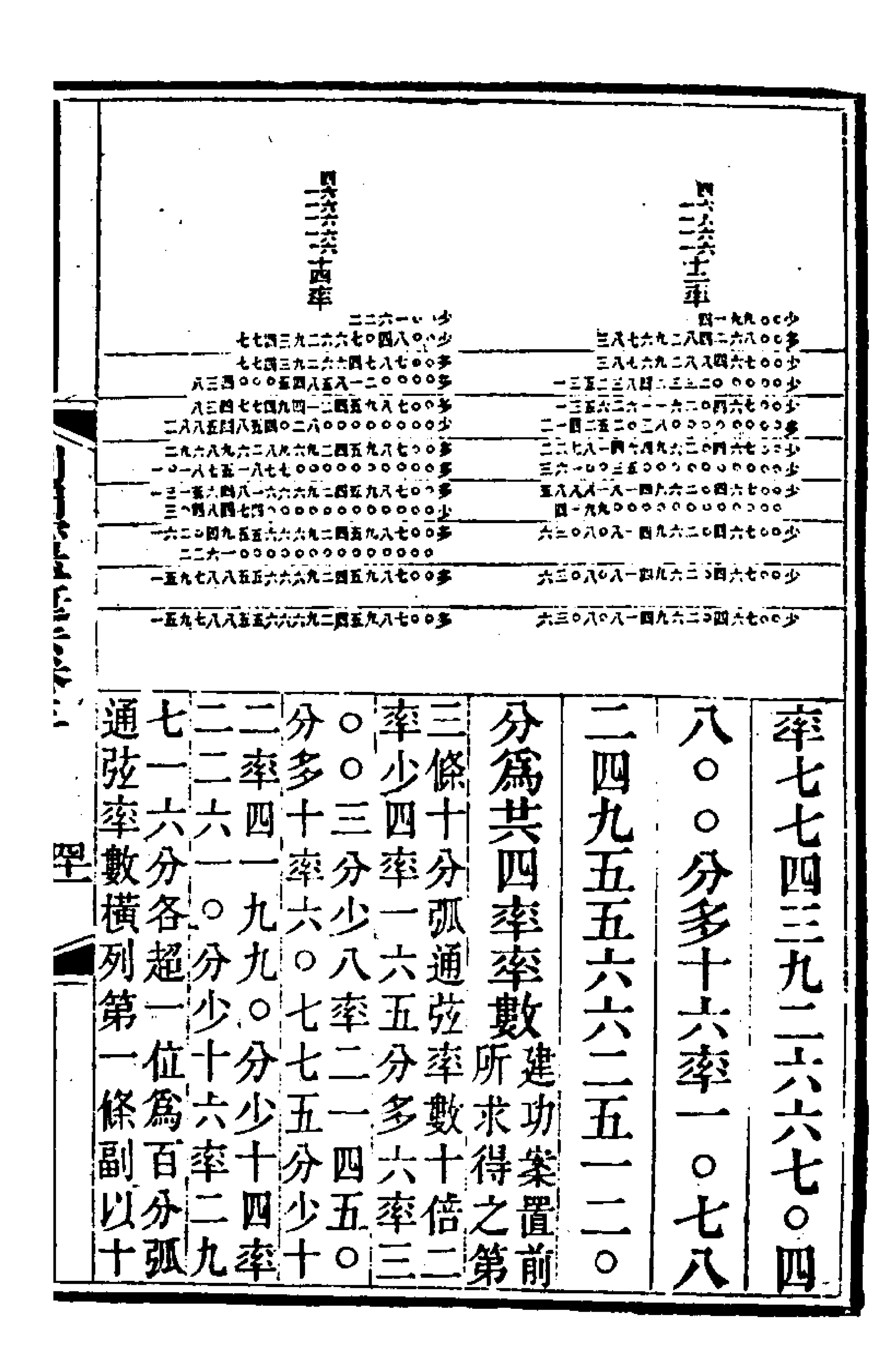
相乘一率除之得一十兆十六率爲十六率率數依原分母列之得四分又六次十六分十六率之一之率數此以十分弧通弦率數爲二一率率數求得各率率數又依各原率原分母數取其一分之率數也乃以十分弧通弦率數之二率共數。一偏乘



二率率數即十分弧通弦率數得一〇〇二率少四率一六五〇分多六率三〇〇三〇分少八率二一四五〇〇分多十率六〇七七五〇分少十二率四一九九〇〇分少十四率二二六一〇〇分少十六率二九七一六〇分為其二率率數為第一條又以

四十六率	四十六十八率	四十六十八十率
三○○三○多 三二六七○○○○少	二一四五○○少 二七五○八一四○○○多	六○七七五○多 一三○一七○三四八○○○少
三二七○○○三○多 三○○三○○○○○	二七五一○二八五○○少 九九○九九○○○○○○少	一三○一七○九五五七五○多 一四八八四六六九八○○○○○多
三三三○○○○三○多	一○一八五○○二八五○○少 二一四五○○○○○○○○	一五○一四八四○七五五七五○多 九九○九九○○○○○○○○○少
三三三○○○○三○多	三一六三五○○二八五○○少	一一四一一三八四○七五五七五○多 六○七七五○○○○○○○○○
三三三○○○○三○多	三一六三五○○二八五○○少	一七四八八八八四○七五五七五○多
三三三○○○○三○多	三一六三五○○二八五○○少	一七四八八八八四○七五五七五○多
三三三○○○○三○多	三一六三五○○二八五○○少	一七四八八八八四○七五五七五○多
三三三○○○○三○多	三一六三五○○二八五○○少	一七四八八八八四○七五五七五○多

十分弧通弦率數應減之四率
共分數徧乘四率一分率數得
四率一六五○○○分少六率
三二六七○○○分多八率
二七五○八一四○○○分少
十率一三○一七○三四八○
○○分多十二率三八七六九
二八四二六八○○分少十四



率七七四三九二一六六七〇四八〇〇分多十六率一〇七八二四九五五六六二五一二〇分爲共四率率數建功案置前所求得之第三條十分弧通弦率數十倍二率少四率一六五分多六率三〇〇三分少八率二一四五〇分多十率六〇七七五分少十二率四一九九〇分少十四率二二六一〇分少十六率二九七一六分各超一位爲百分弧通弦率數橫列第一條副以十

四六六八六六十六率

少○六一七九二
多○二一五二六六五五九四二八七○一
少○八二二九六五五九四二八七○一
少○○○○六三九二九一四二五八三六一七三
少○八二二八六八四一九四三六四七一七三
多○○○○○○○八四三六五九四七七三九一七二
少○八二二八六六九四五○三一二五五六五七二
少○○○○○○○○○六四八九七八九二九一八一
少○八二二八二六六九四一五一一○四五九四九○二
少○○○○○○○○○○八六四六八七四一六○一
少○八二二八二六六九四一三八五六二三四六五一三
少○○○○○○○○○○○○八三九九三九一
少○八二二八二六六九四一三八五八八三四二六九二
○○○○○○○○○○○○○○六一七九二
少○八二二八二六六九四一三八五八四五一二九九二

分弧通弦率數之四率共分數一六五徧乘前所求得之四率一分率數少六率一九八○○○分多八率一六六七一六○○分少十率七八八九一一二○○分多十二率二二三四九六五三五九二○分少十四率四六九三二八八八九一二○分多十六率六五三四八四五七九七七二八分即得此數列于第一條下以下求千分弧萬分弧通弦仿此以減第一條得一○○二率少四率一六六六五○分多六率三二七○○○三○分少八率二七五一○二八五○○分多十率一三○一七○九五五七五○分少十二率三八七六九二八八

四六七○○分多十四率七七四三九二六六四七八七○○
分少十六率一○七八二四九五五六九二三二八○分爲第
二條又以十分弧通弦率數應加之六率共分數三○○三偏乘六
率一分率數得共六率率數以加第二條得一○○二率少四
率一六六六五○分多六率三三三○○○○三○分少八率
一○一八五○○二八五○○分多十率一五○一四八四○
七五五七五○分少十二率一三五六二六一一六二○四六
七○○分多十四率八三四七七四九四一二四五九八七○

○分少十六率三七一七四六三四九一四八六二八二三八

○分爲第三條依次累求建功案以六率共分數三○○三偏乘前所求得之六率一分率數少八率三三○○○○○○○分多十率四九五六六○○○○分少十二率四五○三四四四○○○○分多十四率二七七七二二四六○四○○○○分少十六率一二三七五五七五二三一二○○○○分卽得第二條下之加數用加第二條得第三條數又以八率共分數二一四五○偏乘前所求得之八率一分率數少十率四六二○○○○○○○分多十二率九九八八四四○○○○分少十四率一三四五二一四六四○○○○○○○○○分多十六率一二六七七七五○五六二四○○○○○分卽得第三條下之減數以減第三條得第四至條數依次累求悉如此法以下求千分弧萬分弧通弦仿此

第八條各率數加減號不同而算皆用加惟第六條求第七條則用減蓋此條率數多少同號故也得一○

○二率少四率一六六六五○分多六率三三○○○○三
○分少八率三一六三五○○二八五○○分多十率一七四
八八八八四○七五五七五○分少十二率六三○八○八一
四九六二○四六七○○分多十四率一五九七八八五五六
六六九二四五九八七○○分少十六率二九九二一五四八
五八三一四九六六二八二二八○分即百分全弧通弦率數
也

設圜半徑爲連比例第一率一分弧通弦爲連比例第二率有

	二率	四率	六率
第一減條	一〇〇〇	一六五〇〇少 一六六六五〇〇〇〇	三〇〇三〇〇多 三二九九六七〇〇〇〇〇多
第二加條	一〇〇〇	一六六六六六五〇〇少	三二九九七〇〇〇三〇〇多 三三三〇〇〇〇三〇〇〇〇〇〇
第三減條	一〇〇〇	一六六六六六六五〇〇少	三三三三三〇〇〇〇〇〇三〇〇多
第四加條	一〇〇〇	一六六六六六六五〇〇少	三三三三三〇〇〇〇〇〇三〇〇多
第五減條	一〇〇〇	一六六六六六六五〇〇少	三三三三三〇〇〇〇〇〇三〇〇多
第六加條	一〇〇〇	一六六六六六六五〇〇少	三三三三三〇〇〇〇〇〇三〇〇多
第七減條	一〇〇〇	一六六六六六六五〇〇少	三三三三三〇〇〇〇〇〇三〇〇多
第八條	一〇〇〇	一六六六六六六五〇〇少	三三三三三〇〇〇〇〇〇三〇〇多

十分全弧通弦率數百分全弧通弦率數（皆見前題所得）求千分（十分百分相乘之數）全弧通弦率數幾何

法以圜半徑爲連比例第一率十分弧通弦率數爲連比例第二率求得第四率第六率至第十六率各率率數（見前）次以百分全弧通弦各率共數徧乘十分全弧通弦各率諸數（同上）逐條加

十率	八率
多 [illegible]	少 [illegible]
少 [illegible]	多 [illegible]
多 [illegible]	少 [illegible]
多 [illegible]	少 [illegible]
多 [illegible]	少 [illegible]
少 [illegible]	[illegible]
多 [illegible]	少 [illegible]
多 [illegible]	
多 [illegible]	少 [illegible]
多 [illegible]	少 [illegible]
多 [illegible]	少 [illegible]
多 [illegible]	少 [illegible]

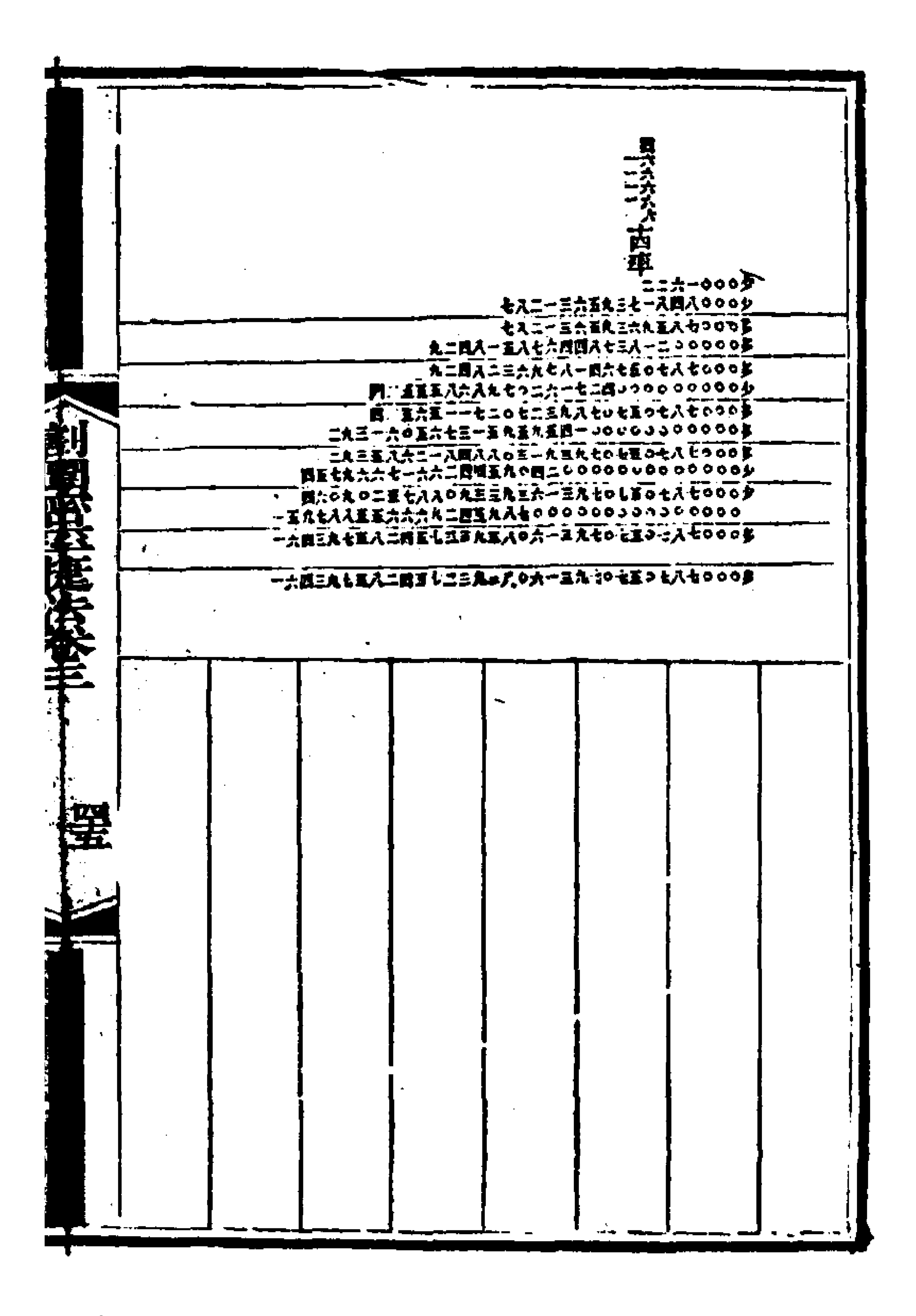
減之卽得全弧通弦率數盖以十分全弧爲一分弧以千分全弧爲百分全弧立算也若以百分全弧爲一分弧千分全弧爲十分弧其理亦同其圖解步法俱與前同茲不復詳惟載逐條加減之數于後以備參考建功

案前求百分弧用第三條十分弧通弦率數各超一位爲百分弧通弦率數今求千分弧則仍用十分弧通弦率數各超二位

四六六六六六
一一一一一十六率

少○○○九九四
多○○○八六○一一七七九六五一九三
少○○○七六二五一七七九六五一九五
少○○○○○二三三○一七八七六四六九九四一
少○○○七六二七四○八○四四一六八六九九四一
多○○○○○○○○○四五○七六八七二三四八九五一三
少○○○七六二七四○二六四一八四六九二四三一六一三
少○○○○○○○○○○○五五一九八○四一七九三八八三○一
少○○○七六二七四○二六九六九三五○七五○一○○二四○一
○○○○○○○○○○○○七六四○二六九四一八○八○三六
少○○○七六二七四○二六九六六○○一九一○六一八二二一四六
少○○○七六二七四○二六九六六○○一九一○六一八二二一四六
少○○○七六二七四○二六九六六○○一九一○六一八二二一四六

爲千分弧通弦率數橫列第一條乃以前所求得第八條百分弧通弦率數之四率共分數一六六六五○偏乘四率一分率數爲第一條下之減數以六率共分數三三三○○○○三○偏乘六率一分率數爲第二條下之加數悉加前求百分弧依次累求



一六一六二六一六二六十七率

少○○六一七九二
多○○二一七三一九一二五○二三○九八○一
少○○八二四三四九一二五○一三○九八○一
少○○○○○六三九六五八六五二三二九六六○一二一四
少○○八二四九七八八七三七七五三一八七七○一二一四
多○○○○○○○四八二○一三一一三七一五七六○六○一○四
少○○八二四九七八二六六七八八四二一六九五八八一○一一○四
少○○○○○○○○○○○八一七九一四一五三五九六○五九二五三二五
少○○八二四九七八二六六五○六四四五六四九三八八○六○三九三二五
多○○○○○○○○○○○○○四四二四八三六六六六八二七○一○四六四九五一
少○○八二四九七八二六六五四○七八三○一六七四七三五一四九七八九九五一
少○○○○○○○○○○○○○○○○六四八六五○三一二二二六一八五八七○七三一
少○○八二四九七八一六六五四○七四八八七一八七八五九三○一六四八九六八三一
○○○○○○○○○○○○○○○○○八二二八二六六九四一三八五八四五一二七九二
少○○八二四九七八二六六五四○七四六一○○一四五五○五三九一三三五八○三一三

右第八條所得即千分全弧通弦之率數也

設圓半徑爲連比例第一率一分弧通弦爲連比例第二率有十分全弧通弦率數千分全弧通弦率數並見前題所得求萬分十分千分相乘之數全弧通弦率數幾何

條	二率	四率
第一條減	一〇〇〇〇	一六五〇〇〇少 一六六六六六五〇〇〇〇〇
第二條加	一〇〇〇〇	一六六六六六六六五〇〇〇少
第三條減	一〇〇〇〇	一六六六六六六六五〇〇〇少
第四條加	一〇〇〇〇	一六六六六六六六五〇〇〇少
第五條減	一〇〇〇〇	一六六六六六六六五〇〇〇少
第六條加	一〇〇〇〇	一六六六六六六六五〇〇〇少
第七條減	一〇〇〇〇	一六六六六六六六五〇〇〇少
第八條	一〇〇〇〇	一六六六六六六六五〇〇〇少

法以十分弧爲一分弧以萬分全弧爲千分全弧立算列式如左建功案以十分弧通弦率數各超三位爲萬分弧通弦率數橫列第一條乃以前所求得第八條千分弧通弦率數之四率共分數一六六六六六五〇〇偏乘四率一分率數爲第一

四六
一六六率

三〇〇三〇〇〇多
三二九九九九六七〇〇〇〇〇〇〇少
三二九九九九七〇〇〇三〇〇〇多
三三三三三〇〇〇〇〇〇〇三〇〇〇〇〇〇〇
三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇〇三〇〇〇多
三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇〇〇三〇〇〇多
三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇〇〇三〇〇〇多
三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇〇〇三〇〇〇多
三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇〇〇三〇〇〇多
三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇〇〇三〇〇〇多

四六
二六八率

二一四五〇〇〇〇少
二七七八五九七二二一四〇〇〇〇〇多
二七七八五九七二四二八五〇〇〇〇少
一〇九九九八七〇〇〇〇〇九九〇〇〇〇〇〇〇〇少
一〇九九九九一七七八六〇七一四二八五〇〇〇〇少
三一七四四九二〇六四三一四二八五〇〇〇〇〇〇〇〇〇
三一七四六〇二〇六三四九二一四五七一四二八五〇〇〇〇少
三一七四六〇二〇六三四九二一四五七一四二八五〇〇〇〇少
三一七四六〇二〇六三四九二一四五七一四二八五〇〇〇〇少
三一七四六〇二〇六三四九二一四五七一四二八五〇〇〇〇少
三一七四六〇二〇六三四九二一四五七一四二八五〇〇〇〇少

條下之減數
餘悉如前

四六六
一二六
二十乘

多○○○五七七○六
少○○○○○八四一五八六○五八四一三一
多○○○五七五五七五八六○五八四一三一
多○○○○○○○八七六八四一○八七四二八一二五六一
多○○○五七五六五五五五六八二九七四八一二五六一
少○○○○○○○○○○○七六七九一三一七三三三五一六六六六四一
多○○○五七五五五五五二三八二一一六五五五八一六六六六四一
○○○○○○○○○○○五七九五五五七○四八六六五八二○二五三六七一
多○○○五七五五五五五七○四八六六三六九三五八八四九六六六三六七一
多○○○五七五五五五五七○四八六六三六九三五八八四九六六六三六七一
多○○○五七五五五五五七○四八六六三六九三五八八四九六六六三六七一
多○○○五七五五五五五七○四八六六三六九三五八八四九六六六三六七一

四六六六十二率

少○○○○九九一四

多○○○○八六一九三二四五八○六一七二

少○○○○七六二五九三○四五八○六一七三

少○○○○○○二三三○一五三三八八九二三一一○五一

少○○○○七六二七二七○五○二四一○八三三三一一○五一

多○○○○○○○○○○四五六八六七三九七八四一五三二二八○七一三

少○○○○七六二七二七四○七○一九三七一二八二六三七三八○七一三

少○○○○○○○○○○○○五五一一○八八○四三○七八六九四○一三五七四○一

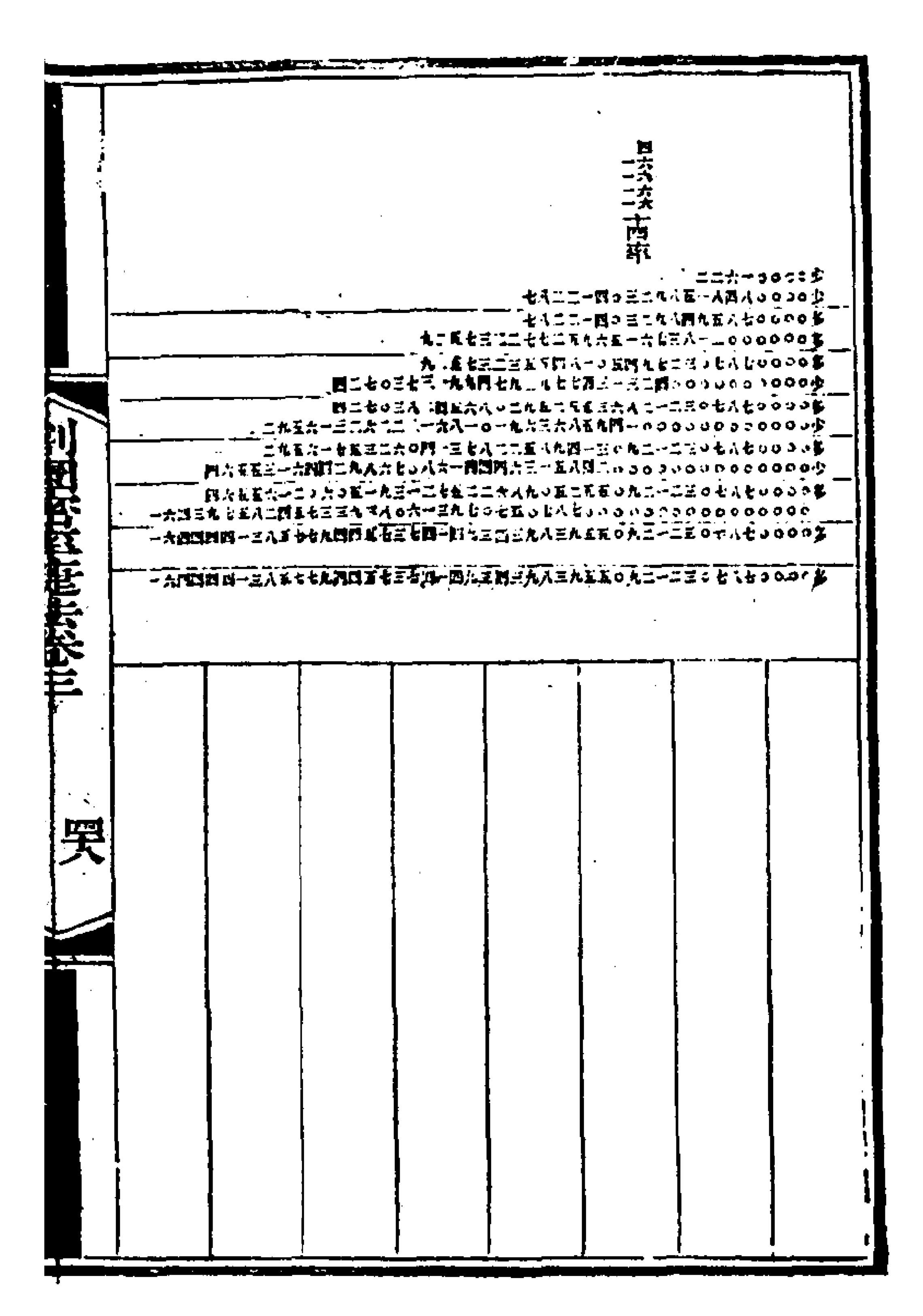
少○○○○七六二七二七四○二六二○四五○三二六六○六○八五七二六五七四○一

○○○○○○○○○○○○○○七六二七四○二六九六六○○一九一○六一八二二一四六

少○○○○七六二七二七四○二六九六六二五三四二六七二一八六六四六一九二三三一四六

少○○○○七六二七二七四○二六九六六二五三四二六七二一八六六四六一七二三三一四六

少○○○○七六二七二七四○二六九六六二五三四二六七二一八六六四六一九二三三一四六



四六八六六一一一一十四術

少二二○○一六二二

少○○○○八四八一五八九二三○四一二二八七

多○○○○七八五九四八九二三○四一二二八七

多○○○○○○二一八三六一五六九五二七七二二三七五二九

多○○○○七八七○三二七九四五○一八一四五三二三七五八九

少○○○○○○○○○○四二三一五四七七一二七九四七九一二七三○七二四

多○○○○七八七○三二一二八六五五二五九二○八六五四八三○七二四

少○○○○○○○○○○○○一四九五八六三九一○一八一六二六二三一六五九二

多○○○○七八七○三一二九○三一四九八五二八七三一四○六二三五七一六五九二

少○○○○○○○○○○○○○○○○二八五一三六五四四一六八一○七六八九二四四一六三五五六四

多○○○○七八七○三二一二九○五二九○九八八二二五二一三九一五○六二六一六五五六四

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○七八九七○五八七○六一八○九八三七八五三二九八三六一

多○○○○七八七○三二一二九○五五九三八九三六三九三七五四四九七八五三一二四四四四六一

多○○○○七八七○三二一二九○五五九三八九三六三九四一四三五四四九七八五三一二四四四四六一

四六六六六十六率
一一一一

少○○○六一七九二
多○○○二一七三三○七四一七七八九三一九八○一
少○○○八二四三六○七四一七七八九三一九八○一
少○○○○○○○六三八八八二七二二○三五八一七四○五一五二一四
少○○○八二四九九九三○四四○一○七六七○○六○五一五二一四
多○○○○○○○○○四八八三○一九二六三六七四九六三五五八一四五四二○四
少○○○八二四九九九七八二八○三六九二一七七○○二五○八九五四五四二○五
少○○○○○○○○○○○○八一九六八四九七五八○五九八七○六七六七五五七二九七二五
少○○○八二四九九七七八二六一一六八七○五三九○七四九五○二二二二八五三一九七二五
少○○○○○○○○○○○○○○○四四八一六七一七○二○五五九三九一七九七四四五八一一八九○二六一
少○○○八二四九九九七八二六六五四○四八六○○三七九四九四一四九一六○八五七九三三○一二六一
少○○○○○○○○○○○○○○○○○六四二五七一四○九六八七六六五八八一七九三八四○五二一三五○一四一
少○○○八二四九九九七八二六六五四六八○二八一七七八一四二八○五○五二五六一八八○六三三九六○一四一
○○○○○○○○○○○○○○○○○八二四九七八二六六五四○七四六一○○一四五五○五三九一三三六八○三一三
少○○○八二四九九九七八二六六五四六六三六七九五○五八九六八七九六六二五七五三四一一七二一○四六二二三一三

右第八條所得即萬分全弧通弦之率數也

弧背求通弦率數法解

弧圜線也弦直線也二者不同類也不同類雖析之至于無窮不可以一之也然則終不可相求乎非也弧與弦雖不可以一之苟析之至于無窮則所以不可一之故見矣得其不可一之故即可因理以立法是又未嘗不可以一之也何為而不可相求乎今取百分千分萬分弧通弦率數比例相較而得弧背求通弦之率數其法既確然無疑而其數視求各分弧通弦率數

轉爲簡易于此見數理自然之變化誠非人之智力所能測也

其法詳著于後

法以百分千分萬分弧共二率數爲二率（百分弧以一百爲一率千分萬分弧以一千一萬各爲二率）以求各率分數求四率分數以百分弧二率共數一百自乘得一萬爲三率數（連比例二率自乘一率除之得三率今二率爲一百一率仍爲一一除實得原數故二率自乘卽得三率數也四率仿此）再乘得一百萬爲四率數爲實置百分弧四率分數（四分四率之一六六六五〇）四歸之（得四一六六二小餘五）爲應減四率數爲法法除實得二十四（〇〇二四四不盡）是全四率爲應減四率之二

十四倍有餘應減四率爲全四率二十四分之一不足也次以千分弧二率共數一千自乘得一百萬爲三率數再乘得十億爲四率數爲實置千分弧四率分數四分四率之一六六六六六五〇〇四歸之得四一六六六六六六二五〇〇爲應減四率數爲法法除實得二十四分〇〇〇〇二四不盡是全四率亦爲應減四率之二十四倍有餘應減四率亦爲全四率二十四分之一不足但有餘不足之差較百分弧則微耳次以萬分弧二率共數一萬自乘得一億爲三率再乘得一兆爲四率數爲實置萬分弧四率分數一六六六六六六六六五〇〇〇四歸

之得四一六六六六六六二五〇為應減四率分數為法法除實得二十四分〇〇〇〇〇〇二四不盡是全四率仍為應減四率之二十四倍有餘應減四率仍為全四率二十四分之一不足但差數較千分弧愈微耳夫二十四分之數不改惟奇零之差逼弧愈近則愈微若徑以弧背為二率則奇零必盡而為二十四分整數矣爰定弧背

二率一

二四四率一分

求通弦應減之四率為二十四分之一焉蓋舉求而奇零不盡者此弧線直線之所以不可一也去奇零而用整分者因其不可一而得其所以可一也次求

六率分數以百分弧四率數前四歸四率分數所得四一六六二小餘五與三率一萬相乘得六率數四一六六二五〇〇〇爲實置百分弧六率共分數三三三〇〇〇〇三〇以第一分母四歸之又以第二分母十六除之得數五二〇三一二五小餘不用爲應加六率數爲法法除實得八十分〇七不盡又

捷法置原四率共分數一六六六五〇以三率一萬乘之得六率分數一六六六五〇〇〇〇〇爲實置六率共分數以第二分母十六除之得數二〇八一二五〇一小餘不用爲應加六率分數與四率同母爲法法除實得數同前第一分母數四兩率所同故法實各省一除而得數無異是以後俱用此法若分母同二三次或四五次者皆仿此

應減四率分數求得六率分數爲應加六率分數之八十倍有餘而應加六率分數爲應減四率分數求得六率分數八十分之一不足也（後同）次置千分弧四率共分數（一六六六六六五〇〇）以三率百萬乘之得六率分數（一六六六六六五空八位）爲實置六率共分數（三三三三〇〇〇〇〇〇三〇〇）以第二分母十六除之得數（二〇八三三一二五〇〇〇一八）爲應加六率分數（與前率同母後倣此）爲法法除實得八十分（〇〇〇七不盡）次置萬分弧四率共分數（一六六六六六六六五〇〇〇）以三率一億乘之得六率分數（一六六六六六六六五空十一位）爲實置六率共分數（三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇）

○三○○○以第二分母十六除之得數二○八三三三一二五○○○○一八七爲應加六率分數爲法法除實得八十分○○○○○七不盡是八十分之數不改而奇零之差愈推愈微爰定弧背求通弦應加之六率爲二十四分之一又八十分一分之一焉四率分數求得六率分數已爲二十四分之一六率分數取應加分數又爲八十分之一故應加六率爲全六率二十四分之一又八十分一分之一焉求八率分數置百分弧六率共分數見前以三率一萬乘之得八率分數三三三三○○○○三○截去末四位便算爲實置八率共分數三一六三五○二截去末四位以第三分母第一第二分母

二率一

四率減二減二

六率四○二八加一

（兩率/俱同）十六除之得數（一九七七/一八八）為應減八率分數為法法除實得一百六十八分（四二/不盡）次置千分弧六率共分數以三率百萬乘之得八率分數（三三三三三三○○○○○/○三○○截去末六位）為實置八率共分數（三一七四四九二○六/四三一四截去末六位）以第三分母十六除之得數（一九八/四○五）（七五四/○一九）為應減八率分數為法法除實得一百六十八分（○○/四二）（不/盡）次置萬分弧六率共分數以三率一億乘之得八率分數（三/三）（三三三三三○○○○○/○○○截去末十二位）為實置八率共分數（三一七四六○/二○六三四九）（二一截去/末十二位）以第三分母十六除之得數（一九八四一二六/二八九六八二）為應

減八率分數爲法法除實得一百六十八分〇〇〇〇四二不盡是一百六十八分之數不改而奇零之差愈推愈微爰定弧背求通弦應減之八率爲二十四分之一又八十分一分之一又一百六十八分一分之一焉六率分數求得八率分數爲二十四分之一又八十分一分之一八率分數取應減分數又爲一百六十八分之一故應減八率分數爲全八率二十四分之一又八十分一分之一又求十率分一百六十八分一分之一後仿此

二率一
四率二四一減
六率二四八〇一加
八率二四八〇一六八一減

數置百分弧八率共分數以三率一萬乘之得十率分數三一六三五〇〇二八五〇〇截去末四位爲實置十率共分數一七四八八八

八四○七五截去末四位以第四分母數十六除之得數一○九三○五五二五四為應加十率分數為法法除實得二百八十九分四一不盡自十率後所得分數奇零之差百分弧尚差至單位千分弧則皆在單位下矣次置千分弧八率共分數以三率一百萬乘之得十率分數三一七四四九二○六四三二截去末十三位為實置十率共分數一七六三五二○二八五六截去末十三位以第四分母十六除之得數一一○二二○○一七八為應加十率分數為法法除實得二百八十八分○一四不盡次置萬分弧八率共分數以三率一億乘之得十率分數三一七四六○二○六三四九二一截去末二十位為實置十率共分數一七六三六六六九四八八五三截

去末二十位以第四分母十六除之得數一一〇二二九一八四三〇三為應加十率分數為法法除實得二百八十八分〇〇〇一四不盡是二百八十八分之數不改而奇零之差愈推愈微爰定弧背求通弦應加之十率為二十四分之一又八十分之一分之一又一百六十八分之一分之一又二百八十八分一分之一焉求十二率分數置百分弧十率共分數以三率一萬乘之得十二率分數一七四八八八八四〇七五截去末八位為實置十二率共分數六三〇八〇八一四

二率一
二四 四率一減
二四 八〇 六率一加
二四 八〇 一六八 八率一減
二四 八〇 一六八 二八八 十率一加

九截去末八位以第五分母數十六除之得數三九四二五五〇九為應減十二率分數為法法除實得四百四十三分五九不盡次置千分弧十率共分數以三率一百萬乘之得十二率分數一七六三五二〇二八五六六八四截去末十六位為實置十二率共分數六四一二二八一六〇一九一截去末十六位以第五分母數十六除之得數四〇〇七六七六〇〇一一為應減十二率分數為法法除實得四百四十分〇三五不盡次置萬分弧十率共分數以三率一億乘之得數一七六三六六六九四八八五三九六三截去末二十五位為實置十二率共分數六四一三三二九一六四六六八一截去末二十五位以第五分母十六除

之得數四〇〇八三三〇七二七九一七爲應減十二率分數爲法法除實得四百四十分〇〇〇三五不盡是四百四十分之數不改而奇零之差愈推愈微爰定弧背求通弦應減之十二率爲二十四分之一又八十分之一又一百六十八分之一又二百八十八分之一又四百四十分之一焉求十四率分數置百分弧十二率共分數以三率一萬乘之得十四率分數六三〇八〇八一四九六二〇四截去末八位爲實置十四

二率一
四率 二四 一減
六率 二四 八〇 一加
八率 二四 八〇 一六八 一減
十率 二四 八〇 一六八 二八八 一加
十二率 二四 八〇 一六八 二八八 四四〇 一減

率共分數一五九七八八五五六六六九截去末八位以第六分母十六除之得數九九八六七八四七九一爲應加十四率分數爲法法除實得六百三十一分六四不盡次置千分弧十二率共數以三率一百萬乘之得十四率分數六四一二二八一六〇一九一〇〇截去末二十位爲實置十四率共分數一六四三九七五八二四五七三截去末二十位以第六分母十六除之得數一〇二七四八四八九〇三五爲應加十四率分數爲法法除實得六百二十四分〇七五不盡次置萬分弧十二率共分數以三率一億乘之得數六四一三三二九一六四六六八一二七六截去末三十位爲實置十四率共分數一六四四四四一三八五七七九四

四五截去末三十位以第六分母十六除之得數一〇二七七七五八六六一一二一五爲

二率一	四率一減	六率一加	八率一減	十率一加	十二率一減	十四率一加

應加十四率分數爲法法除實得六百二十四分〇〇〇七是六百二十四分之數不改而奇零五不盡之差愈推愈微爰定弧背求通弦應加之十四率爲二十四分之一又八十分一分之一又一百六十八分一分之一又二百八十八分一分之一又四百四十分一分之一又六百二十四分一分之一焉求十六率分數置百分弧十

四率共分數以三率一萬乘之得十六率分數一五九七八八五五六六六九二四截去末十位為實置十六率共分數二九九二一五四八五八三一截去末十位以第七分母十六除之得數一八七○○九六七八八六四為應減十六率分數為法法除實得八百五十四分四四不盡次置千分弧十四率共數以三率一百萬乘之得十六率分數一六四三九七五八二四五七三三三截去末二十五位為實置十六率共分數三一三○八五三三一九三五五截去末二十五位以第七次分母十六除之得數一九五六七八三三二四五為應減十六率分數為法法除實得八百四十分一四不盡次置萬分弧十四率共分數以三率

一億乘之得十六率分數一六四四四四一三八五七七九四四五截去末三十八位為實

置十六率共分數三一三二二六四〇一二七一一四截去末三十八位

以第七次分母十六除之得數一九五七六六五〇〇七九四為應減十六率分數為法法除實得八百四十分〇〇一四四不盡是八百四十分之數不改而奇零之差愈推愈微爰定弧背求通弦應減之十六率為二十四分之一又八十分一分之一又一百六十八分一分之一又二百八十八分一分

二率一

四率一減 二四

六率一加 [illegible]

八率一減 [illegible]

十率一加 [illegible]

十二率一減 [illegible]

十四率一加 [illegible]

十六率一減 [illegible]

之一又四百四十分一分之一又六百二十四分一分之一又八百四十分一分之一焉各率分數既定則有圜半徑及弧背之數求通弦之數易易矣然先求得各率全數次按分母數除之六率而後分母遞加則不勝其繁今按各率分數卽各率全數用分母除得之數若用以求後率則只用遞加之一分母除之卽可得後率分數布算甚爲省便乃定有圜半徑及弧背求通弦之法以半徑爲連比例第一率弧背爲連比例第二率求得四率取其二十四分之一爲應減分數又以應減之四率分

數求得六率分數取其八十分之一爲應加分數又以應加之六率分數求得八率分數取其一百六十八分之一爲應減分數又以應減之八率分數求得十率分數取其二百八十八分之一爲應加分數又以應加之十率分數求得十二率分數取其四百四十分之一爲應減分數又以應減之十二率分數求得十四率分數取其六百二十四分之一爲應加分數又以應加之十四率分數求得十六率分數取其八百四十分之一爲應減分數 按圜半徑一千萬弧背求通弦至八率已足用惟通弦求弧背須至十六率而通弦求弧背即弧背求通

弦之數而轉用之故弧背求通弦亦取至十六率然後以各應加之數與弧背相併各應減之數相併兩總數相減卽得通弦之數又各分母數遞加則漸大今復析爲小數且使其順序以便取用試將分母均以四歸之則二十四得六八十得二十一百六十八得四十二百八十八得七十二四百四十得一百一十六百二十四得一百五十六八百四十得二百一十而六爲二三相乘之數二十爲四五相乘之數四十二爲六七相乘之數七十二爲八九相乘之數一百一十爲十十一相乘之數一百五十六爲十二十

三相乘之數二百一十爲十四十五相乘之數是四歸爲各率之所同四率則加二歸三歸三數除三次與三數連乘除一次者同六率則加四歸五歸八率則加六歸七歸十率則加八歸九歸十二率則加十除十一除十四率則加十二除十三除十六率則加十四除十五除依次遞加一數以爲法易知而便於記憶莫有過於此者且由此而推之則十八率之加十六除十七除二十率之加十八除十九除以至於無窮皆可得而定矣

通弦求弧背法解

弧背求通弦率數既定用其率數反求之即可得通弦求弧背率數法以圜半徑爲連比例第一率弧背求通弦其率數爲連比例第二率求得第四第六等各率數按弧背求通弦其率數內所少率數遞加之詳見後至得一整二率而止又另借一根爲通弦爲連比例第二率與前對求得各率遞加之至十六率而止其所得之共率數即通弦求弧背之率數也蓋通弦率數由弧背而得而弧背率數又即因通弦率數而定其環轉相生之妙亦猶求二分弧通弦率數前二法之義也其求各率及遞加

二率一二一　四率　六率　八率　十率　十二率　十四率　又二率一二

又三率一　三率　五率　七率　九率　十一率　十三率　十五率　又三率一

之法俱與前同茲具算式於後至其中數有與前不同者則詳言之以備參考

此二率求三率式也各率全數或分數相乘得所求各率相當之分數其理同前但前分母數俱同今各母數多寡迥殊則得數多奇零不盡者茲畧舉數端

以明之如二十四分四率之一自乘一率除之應得二十四分又二十四分七率之一令七率之上原分母爲二十四分又八十分其第一次分母二十四分同者不論以第二次分母二十四分與八十分比之則爲一與三又三分之一故得七率分數爲三分又三分之一也又如二十四分又八十分六率之一自乘一率除之應得二十四分又八十分又二十四分又八十分十一率之一令十一率之上原分母第一次第二次俱同第三次則爲一百六十八分第四次則爲二百八十八分以二十四

分又八十分與一百六十八分又二百八十八分比之以二十四八十相乘爲一率一百六十八二百八十八相乘爲二率一分爲三率乘除求四率則爲一與二十五又五分之一故得十一率分數爲二十五分又五分之一也又如二十四分又八十分又一百六十八分八率之一與二十四分又八十分六率之一相乘一率除之應得二十四分又八十分又一百六十八分又二十四分又八十分十三率之一令十三率之上原分母數第一第二第三次同第四次則爲二百八十八分第五次則爲四百四十分以二十四分又八十分與二百八

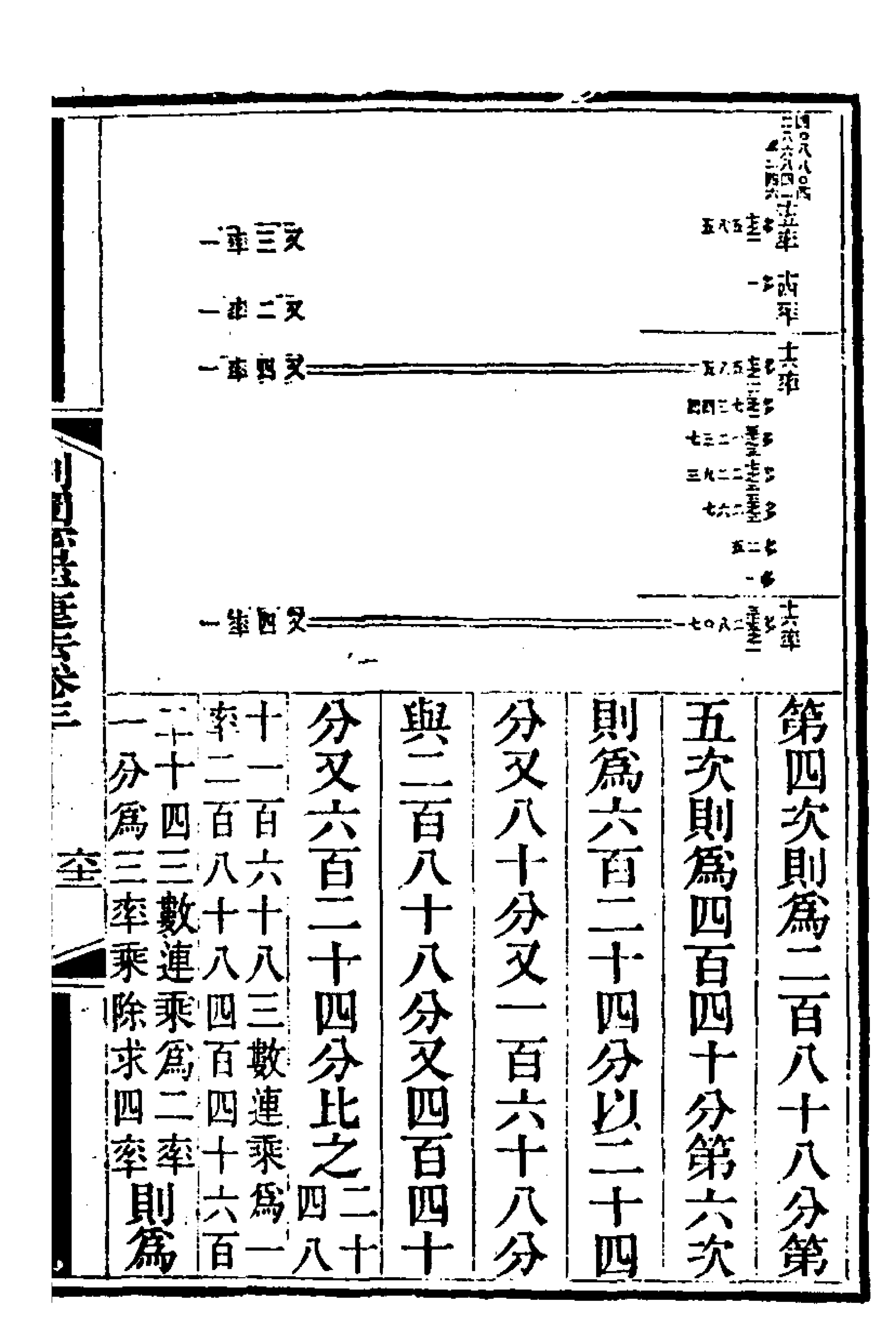
三　一率　　五率 [illegible]　　七率 [illegible]　　九率 [illegible]　　十一率 [illegible]　　十三率 [illegible]

二　一率　　四率 一分　　六率 一分　　八率 一分　　十率 一分　　十二率 一分

四　一率　　六率 [illegible]　　八率 [illegible]　　十率 [illegible]　　十二率 [illegible]　　十四率 [illegible]

四　一率　　六率 三分　　八率 一三分　　十率 [illegible]　　十二率 [illegible]　　十四率 [illegible]

十八分又四百四十分比之同上則爲一與六十六故得十三率分數爲六十六也又如八率之一分自乘一率除之應得二十四分又八十分又一百六十八分又二十四分又八十分又一百六十八分十五率之一令十五率之上原分母前三次俱同



第四次則爲二百八十八分第五次則爲四百四十分第六次則爲六百二十四分以二十四分又八十分又一百六十八分與二百八十八分又四百四十分又六百二十四分比之二十四八十一百六十八三數連乘爲一率二百八十八四百四十六百二十四三數連乘爲二率一分爲三率乘除求四率則爲

十二率	十一率	十率	九率	八率	七率	六率	五率	四 一率	三 一率
[illegible]	[illegible]	六八[illegible]少	一六少	一三多	五[illegible]多	三少	二少		

十四率	十二率	十率	八率	六 一率
五[illegible]多 五七六多 一七四七[illegible]多 一六四〇多 [illegible]多	一六少 一一二少 一八二少 六八[illegible]少	五[illegible]多 二〇多 一三多	二少 三步	
[illegible]七多	三七八[illegible]少	三[illegible]多	[illegible]少	

一與二百四十五又七分之一

故得十五率分數為二百四十

五分又七分之一也餘皆倣此

推之建功案二率自乘一率除之得三率法以二率副置上下二位使各率全數橫列七行自左而右上下相當挨次徧乘上位其乘得數與乘得之率數亦挨次遞降乘訖各併各率所乘諸數即為求得之三率各率數也其法與前並同惟此有分母各率之母數多寡迥異試以各行所寄之母數詳言之俾

又三率一

又四率一

又六率一

又六率一

十三率 少一七〇三一

十四率 少二五五五

十五率 少一七〇三一

少二八一六

少一三七二八

少二四〇五三二

少一三七六二

少二五五五

十六率 少五八〇八五

各率求法悉通爲一律據本法以二十四分爲第二行除法其自第二行起者因第一行恒爲一無分母也以八十分一百六十八分二百八十八分四百四十分爲第二行乘各率之總母以二十四分八十分相乘爲第三行除法以一百六十八分二百八十八分相乘爲第三行自乘總母以二百八十八分四百四十分相乘爲第三第四兩行相乘總母以四百四十分六百二十四分相乘爲第三第五兩行相乘總母以二十四分八十分一百六十八分相乘爲第四行除法以二百八十八分四百

三乘一	五乘（二四）二少	七乘（二四八〇）[illegible]多	九乘（二四八〇一六八）一六少	十一乘（二四八〇一六八二六八八）五一[illegible]多	又三乘一
六乘一	八乘 五少	十乘 三八[illegible]多	十二乘 三七八[illegible]少	十四乘 四[illegible]一七多	又六乘一
八乘一	十乘 二少 五少	十二乘 [illegible]多 三三[illegible]多 三八[illegible]多	十四乘 一六少 一八六[illegible]少 五二六[illegible]少 三七八[illegible]少	十六乘 五一[illegible]多 九六〇多 五一五二多 九〇八〇多 四[illegible]一七多	又八乘一
八乘一	十乘 七少	十二乘 七七多	十四乘 一一一七[illegible]少	十六乘 一九六六〇[illegible]多	又八乘一

四十分六百二十四分相乘爲第四行自乘總母葢以下位第二行乘上位第二行以次各行不過多一乘一除以下位第三行乘上位第三行以次各行則多兩次乘除以下位第四行乘上位第四行則多三次乘除又第四行自乘卽得第七行數至七行而止故不須再求然乘除愈多則其法愈煩今變通約分數用總乘總除改爲捷法如第二行自乘得第三行除本數自乘外再用十乘三除以二行乘三行得第四行亦除本數相乘外再用七乘以二行乘四行得第五行則再用十二乘以二行

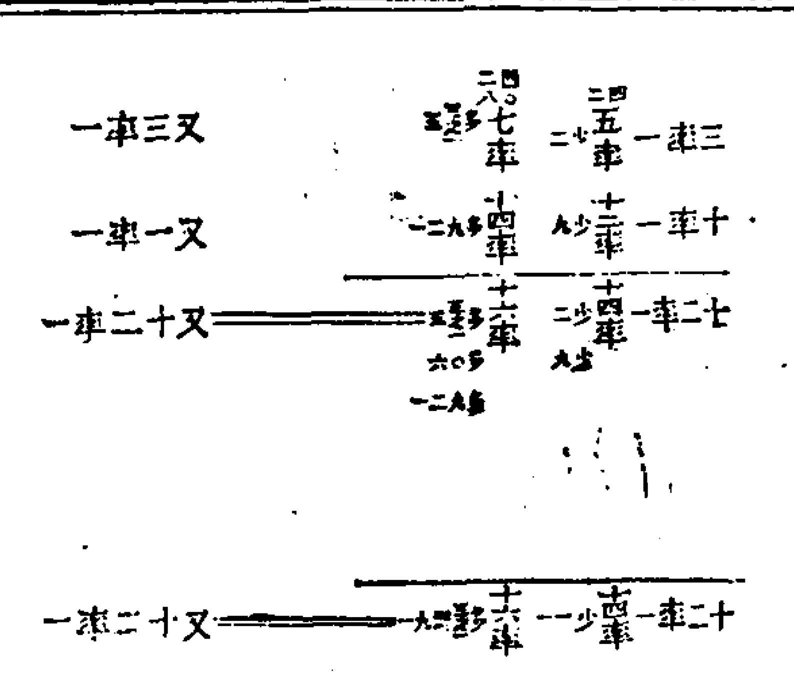
三率一　五率　七率　九率　又三率一

八率一　十率　十二率　十四率　又八率一

十率一　十二率　十四率　十六率　又十率一

又十率一

乘五行得第六行則再用五十五乘三除以二行乘六行得第七行則再用二十六乘如第三行自乘得第五行則一百二十六乘五除以三行乘四行得第六行則六十六乘以三行乘五行得第七行則一百四十三乘一如第四行自乘得第七行則以千七百一十六乘以七除皆先以本數乘訖然後再以此數乘除之或止乘不除即得今所求之二率各率數其本數上下均爲一故二行自乘即以三除十得三又三之一爲第三行又二行乘三行即以七爲第四行是也餘悉仿此至二十率三率相乘得



四率各行所加之乘除各母并同先置三率于上二率于下如第二行上位五率少二率與下位四率少一雖五率與四率率數不同而其同爲第二行也則一即以爲第二行自乘也可其少二與少一爲兩本數相乘仍得二再用十一乘三除得第三行多六又三之二是也其三率四率相乘得六率則置三率于上四率于下如第二行上位五率少二與下位六率少三以少二與少三兩本數相乘得六再用十乘三除得第三行多二十是也求各行諸數及求八率十率十二率十四率十六率諸數悉依

一率三又　　　　二四五二少率　　一率二

一率二十又　　　一少率　　一率二十

一率四十又　　　二少率　　一率四十

一率四十又　　　一少率　　一率四十

一率三又　　　　　　　　一率三

一率四十又　　　　　　　一率四十

一率六十又　　　　　　　一率六十

捷法各行用各行乘
除諸分册可以類推

	十四率	十二率	十率	八率	六率	四率	二	
第一加第二 較 餘	[illegible] 一多 [illegible]少 [illegible]少	[illegible] 一少 七三八一多 七三八〇多	[illegible] 一多 八二〇少 八一九少	二四〇八 一六八 一少 九一多 九〇多	二四 八〇 一多 一〇少 九少	二四 一少 二 〇	遞 一 一	
	[illegible] 二五五五少	[illegible] [illegible]多	[illegible] [illegible]少	[illegible] 一三多	二四 三四 三少	[illegible] 一		
	[illegible] 六六四三〇少	[illegible] 七三八一多	[illegible] 八二〇少	[illegible] 九一多	二四 八〇 [illegible]少	二四 一		

法以弧背求通弦其率數各數（即二率數）及又二率數各爲第一條左右置於上次取前所得四率其率數（並各率分母數）及又四率數另書於下於各率上俱加一二十四分母數即如二十四除之（取四率、二十四）

一分之又將原分母數書於右各率之下通之使其同母如六率三通爲十八率十三通爲九十一之類拔右第二條四率少一分數左右各加之得第二條建功案置第一條於上視第一條四率少一因取四率一分少六率三多八率十三少十六率六十八又三之一多十

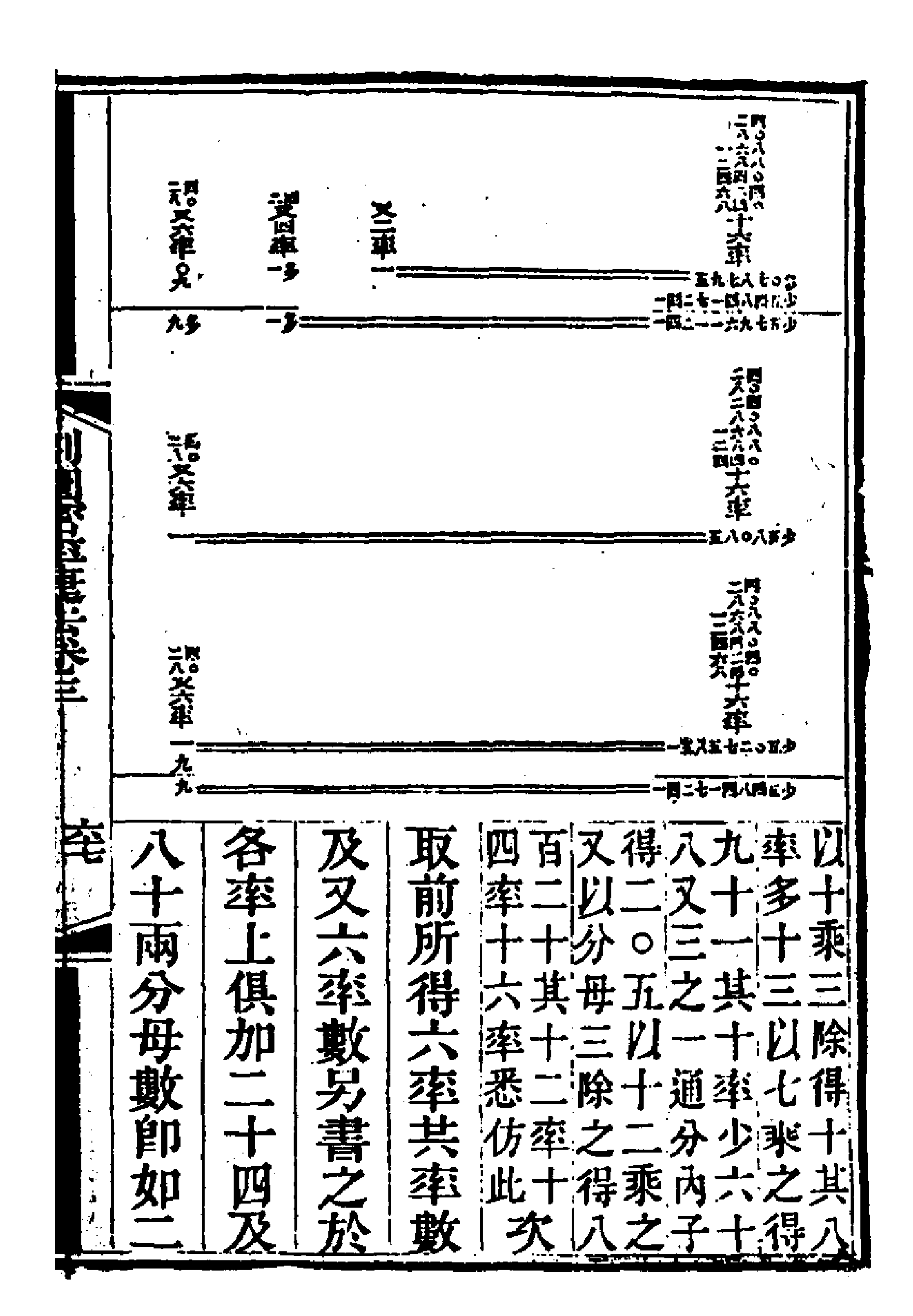
第二加條 二率一 四率○ 六率少九九 八率少[illegible] 十率多[illegible] 十二率[illegible] 十四率少[illegible]

第三條 二率一 四率○ 六率○ 八率少[illegible] 十率多[illegible] 十二率[illegible] 十四率多[illegible]

六率一 八率五少 十率[illegible]少 十二率[illegible]少 十四率[illegible]多

六率一九九 八率三五少 十率[illegible]多 十二率[illegible] 十四率[illegible]多

二率四百二又五之三少十四率二千五百五十五多十六率一萬七千八十二又三十五之一爲加條用加第一條爲第二條其齊同之法與前求各率並同在四率初不過一乘一除無分煩簡然自八率以次則連乘連除未免較煩今改用捷法六率用十乘三除八率用七乘十率用十二乘十二率用五十五乘三除十四率用二十六乘十六率用三十五乘故六率少三



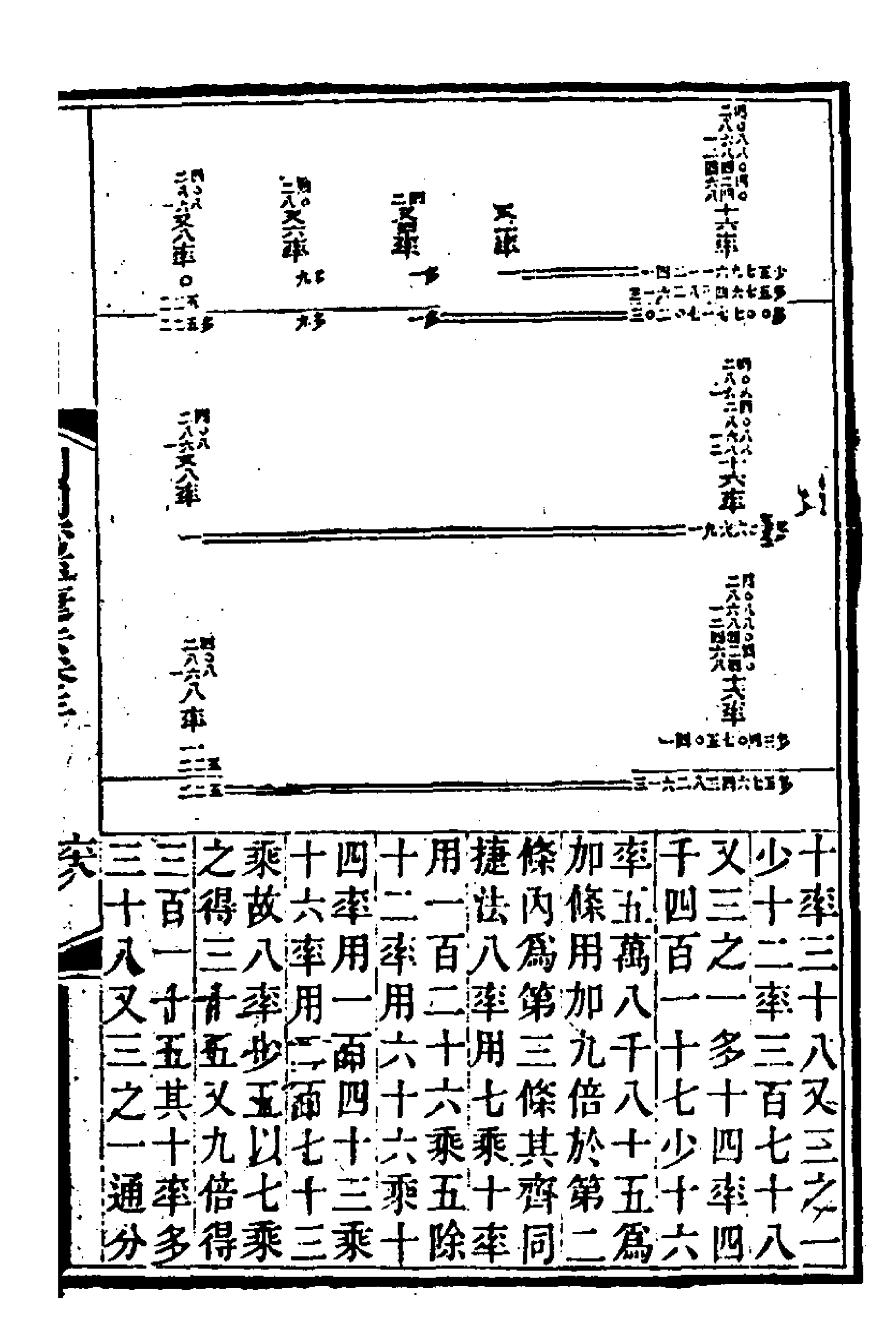
以十乘三除得十其八率多十三以七乘之得九十一其十率少六十八又三之一通分內子得二〇五以十二乘之又以分母三除之得八百二十其十二率十次四率十六率悉仿此

取前所得六率共率數及又六率數另書之於各率上俱加二十四及八十兩分母數卽如二

第三條加第四條	二率一	四率○	六率○	八率	十率	十二率	十四率
第三條	一	○	○	二二五少 / 二二五	七八七五少 / 一八九〇〇少	二一七三五〇少 / 一一四三四五〇多	五六一八二五〇多 / 六一六四七三〇〇少
第四條	一	○	○	○	一一〇二五少	九二六一〇〇多	五六〇二九〇五〇少

	八率	十率	十二率	十四率
	一	七少	七七多	一一一七[illegible]少
	一 / 二二五	八四少	五〇八二多	二七三九八八少
	二二五	一八九〇〇少	一一四三四五〇多	六一六四七三〇〇少

十四除之又八十除之又將原分母數書於右各率之一通之使其同母如八率五通爲三五之類按右第二條六率少九分數左右各九因加之得第三條餘仿此建功案置第二條于上視第二條六率少九因取六率一分少八率五名

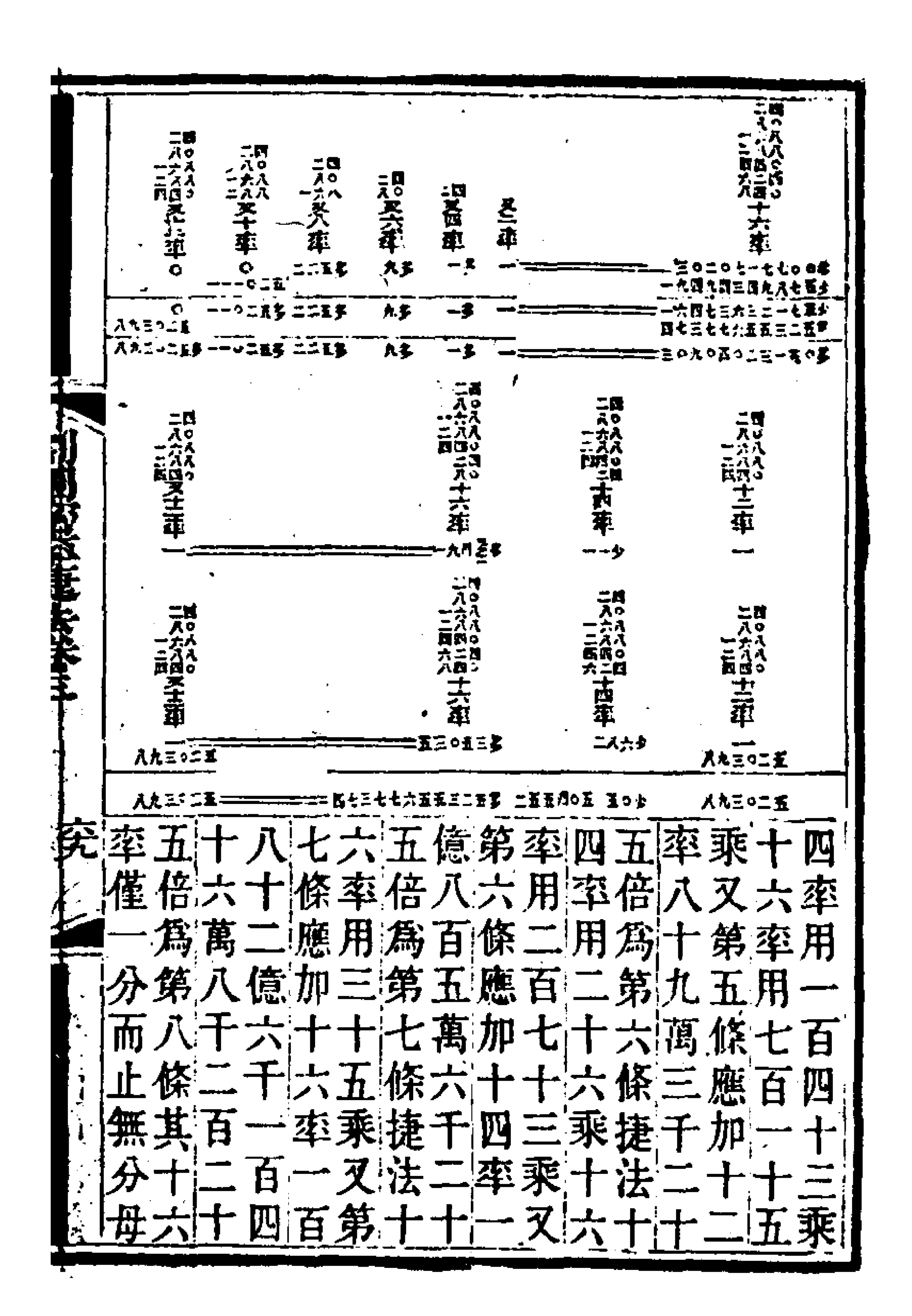


十率三十八又三之一少十二率三百七十八又三之一多十四率四千四百一十七少十六率五萬八千八十五爲加條用加九倍於第二條內爲第三條其齊同捷法八率用七乘十率用一百二十六乘五除十二率用六十六乘十四率用一百四十三乘十六率用二百七十三乘故八率少五以七乘之得三十五又九倍得三百一十五其十率多三十八又三之一通分

	第四條加	第五條加	第六條
二率	一	一	一
四率	○	○	○
六率	○	○	○
八率	○	○	○
十率	少一一○二五 多一一○二五	○	○
十二率	多[illegible] 少[illegible]	少八九三○二五 多八九三○二五	○
十四率	少[illegible] 多[illegible]	多[illegible] 少[illegible]	少[illegible]

	十率	十二率	十四率	十六率	又十率
	一	少九	多一二九	少二四七三	一
	一 一一○二五	少一六五	多七四四八一	少一七三八一九五	一 一一○二五

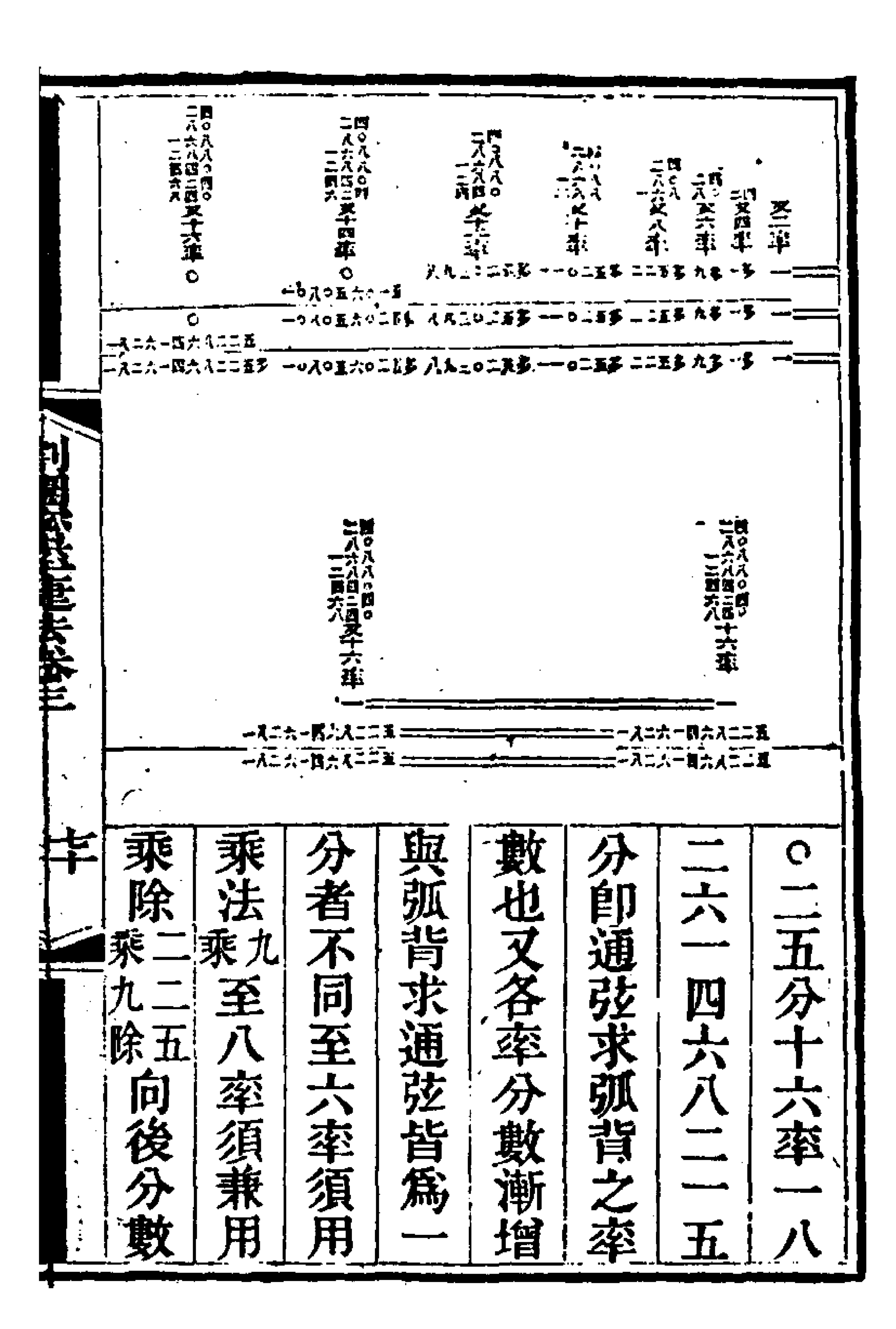
內子得一一五以一百二十六乘之五除之又以分母三除之得九百六十六又九倍之得八千六百九十四其十二率十四率十六率並同又第三條應加八率二百二十五倍爲第四條捷法十率用十二乘十二率用十六乘十四率用一千七百一十六乘七除十六率用七百一十五乘又第四條應加十率一萬一千二十五倍爲第五條捷法十二率用五十五乘三除十



四率用一百四十三乘十六率用七百一十五乘又第五條應加十二率八十九萬三千二十五倍爲第六條捷法十四率用二十六乘十六率用二百七十三乘又第六條應加十四率一億八百五萬六千二十五倍爲第七條捷法十六率用三十五乘又第七條應加十六率一百八十二億六千一百四十六萬八千二百二十五倍爲第八條其十六率僅一分而止無分母

不須再求

依次加至第八條右得一整二率爲弧背左得一二率多四率一分六率九分八率二二五分十率一一〇二五分十二率八九三〇二五分十四率一〇八〇五六



○二五分十六率一八二六一四六八二二五分即通弦求弧背之率數也又各率分數漸增與弧背求通弦皆爲一分者不同至六率須用乘法九乘至八率須兼用乘除二二五乘九除向後分數

十六率	十四率	十二率	十率	八率	六率	四率	二率
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
加一八二六一四六八二二五	加一〇八〇五六〇二五	加八九三〇二五	加一一〇二五	加二二五	加九	加一	一
一六九	一二一	八一	四九	二五	九	一	
一〇八〇五六〇二五	八九三〇二五	一一〇二五	二二五	九	一	一	
一八二六一四六八二二五	一〇八〇五六〇二五	八九三〇二五	一一〇二五	二二五	九	一	
一〇八〇五六〇二五	八九六〇二五	八八二〇〇	九〇〇	一八	九	一	
〇七四五五八六五七二五	〇一八七五三五二五	〇一一〇二五	〇二〇二五	〇四五	〇	〇	
六四八三二六一五	一七八六〇五〇	一一〇二五	二〇二五	四五			
〇九七二五〇四二二五	〇〇八九三〇二五	〇〇〇〇〇	〇〇〇〇	〇〇			
九七二五〇四二二五	八九三〇二五						
〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇	〇〇〇〇〇〇						
一三	一一	九	七	五	三	一	
一三	一一	九	七	五	三	一	
三九	一一	八一	四九	二五	九	一	
一三	一一						
一六九	一二一						

愈多布算較繁今逐次

以前率分數除後率分

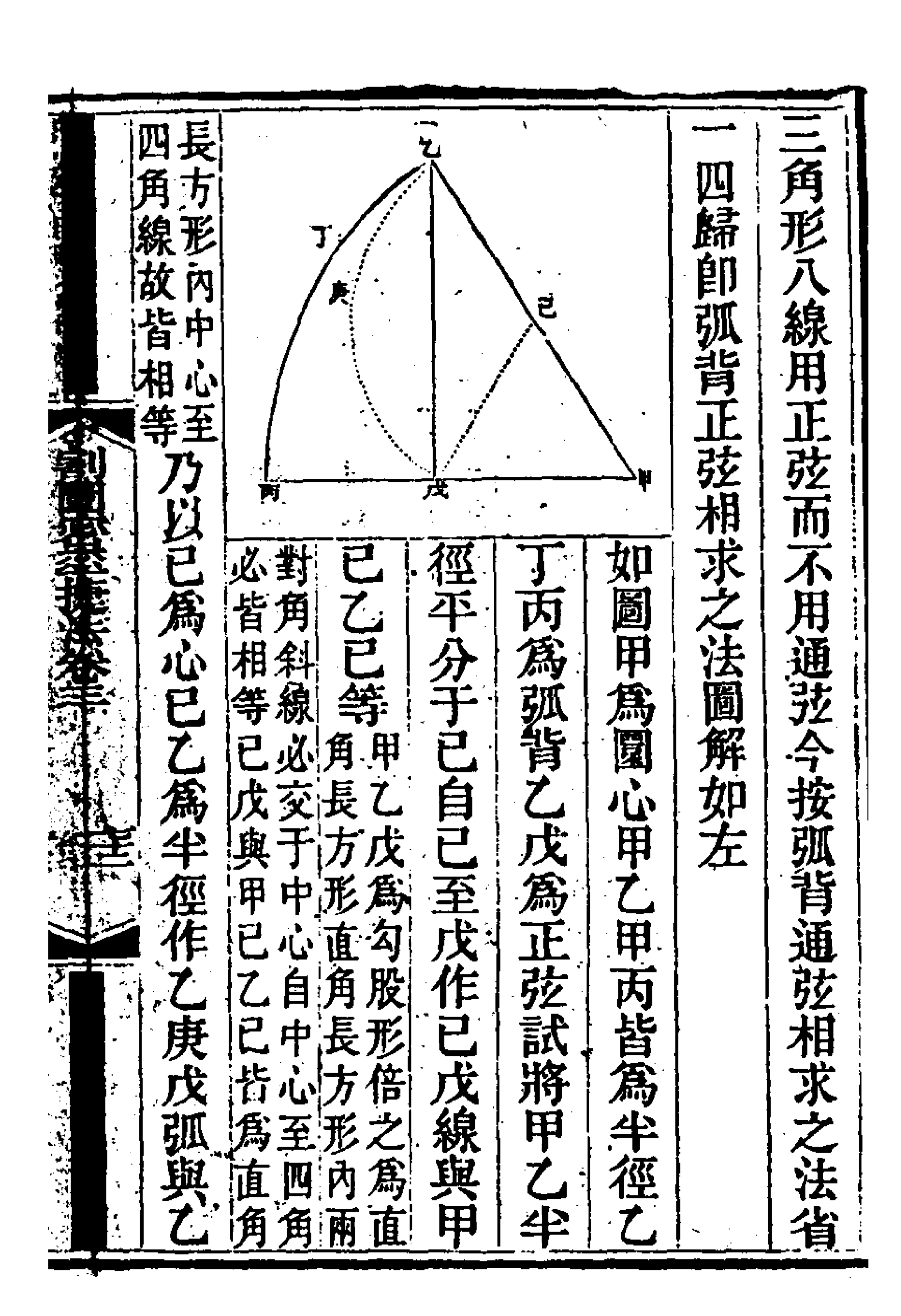
數　建功案此除法也以二率一分加四率一分六率九分八率二二五分十率一一〇二五分十二率八九三〇二五分十四率一〇八〇五六〇二五分遞降二位使二率爲四率四率爲六率橫列于上爲前率分數副以四率一分六率九分八率二二五分十率一一〇二五分

十二率八九三○二五分十四率一○八○五六○二五分十六率一八二六一四六八二二五橫列于下使各率逐行上下相當上位爲法下位爲實以法除實如第二行上位法一下位實九以法約實足九倍乃以九通法一得九書于實下與實相減適盡即定除得數爲九書于法上又如第三行上位法九下位實二百二十五以法約實足二十倍乃以二十通法九得一百八十書于實下與實相減餘實四十五即定初次除得數爲二十書于法上副以法九約餘實足五倍乃以五通法九得四十五書于餘實之下與餘實相減適盡即定第二次除得數爲五書于初次除數二十之次爲除得數二十五餘悉倣此則四率得一分六率得九分八率得二十五分十率得四十九分十二率得八十一分十四率得一百二十一分十六率得一百六十九分而一爲一自乘九爲三自乘二十五爲五自乘四十

九爲七自乘八十一爲九自乘一百二十一爲十一自乘一百六十九爲十三自乘其根皆遞加二數是其比例乘除俱與弧背求通弦法同惟四率而後當先取遞加二數自乘之數以乘前率分數耳如求六率分數先以一加二得三自乘得九以乘四率分數然後比例得六率分數四歸之又四歸之又五歸之爲六率分數求八率分數先以三加二得五自乘得二十五以乘六率分數然後比例得八率分數四歸之又六歸之又七歸之爲八率分數後仿此然其數既依次而推且各差有加無減皆屬簡便但得數降位較遲須多求數次始爲密焉

弧背正弦相求法解

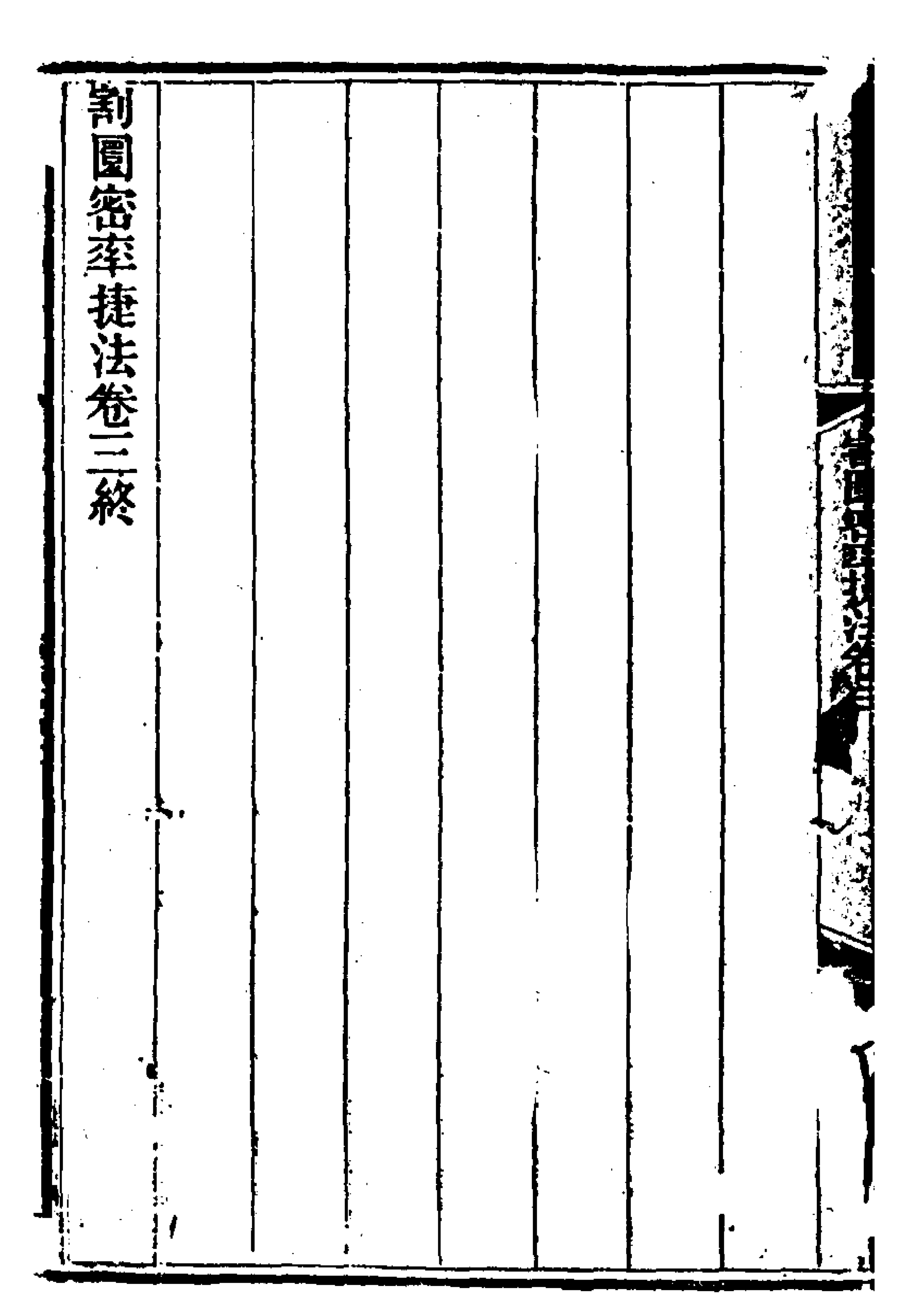
三角形八線用正弦而不用通弦今按弧背通弦相求之法省一四歸即弧背正弦相求之法圖解如左



如圖甲爲圜心甲乙甲丙皆爲半徑乙丁丙爲弧背乙戊爲正弦試將甲乙半徑平分于已自已至戊作已戊線與甲已乙已等甲乙戊爲勾股形倍之爲直角長方形直角長方形內兩對角斜線必交于中心自中心至四角必皆相等已戊與甲已乙已皆爲直角長方形內中心至四角線故皆相等乃以已爲心已乙爲半徑作乙庚戊弧與乙

丁丙弧等已乙小圜半徑爲大圜半徑之半若小圜角與大圜半令甲巳角等則小圜角所當弧背必爲大圜角所當弧背之二丙角與巳一外角等是小圜之乙巳戊爲大圜甲角之倍則小圜巳角所當乙庚戊弧必與大圜甲角所當乙丙弧相等無疑矣則乙丁丙弧之正弦乙戊卽爲乙庚戊弧之通弦矣故以乙丁丙弧之數爲乙庚戊弧之數求得乙庚戊弧之通弦乙戊卽乙丁丙弧之正弦以乙丁丙弧之正弦乙戊爲乙庚戊弧之通弦求得乙庚戊弧之數卽乙丁丙弧之數也然用小圜乙庚戊弧乙戊通弦亦當用小圜乙巳半徑今仍用大圜甲乙半徑是用倍半徑爲首率矣求得三率

必爲二歸之數再以一率與三率爲比必爲兩次二歸之數是逐次比例之中已默寓一四歸矣故弧背通弦相求之法省一四歸即爲弧背正弦相求之法也



割圜密率捷法卷三終